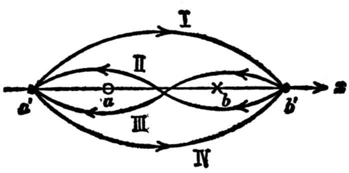
応用超関数論 II

今井　功 著



サイエンス社

はしがき

Dirac のデルタ関数 $\delta(x)$ が理工学の各分野に登場してからすでに久しい．しかし，“$\delta(x)$ は本当の意味で‘関数’ではない，厳密には‘超関数’として扱うべきだ”と数学者にいわれると，δ 関数を使うのになにかうしろめたい気がする．それでは超関数を勉強しようということになるが，これがなかなか難物である．まず，準備として，関数空間とか汎関数などの知識が要求される．このような基礎知識なしでは超関数はわからないのだろうかと嘆息するのはあながち著者のみではないだろう．

Schwartz の「超関数論」にさじを投げかけたころ，著者の目に触れたのが Lighthill の「Fourier 解析と超関数」であった．これは超関数を関数列の極限として把握するもので，古典的な解析学の知識しかない著者にもよくわかる．とくに，超関数を使う具体的な計算がふつうの微積分なみにできるのがありがたい．そのころ，佐藤幹夫氏によって hyperfunction という素晴しいものが提唱されているということを耳にした．これは超関数を‘解析関数の境界値’としてとらえるというもので，流体力学を研究している著者には　超関数＝渦層　というイメージがすぐ浮ぶのである．この考えに基づいて Lighthill の著書を手本に超関数論を構成すれば，専門の数学者でなくても超関数が使えるようになるのではなかろうか．このような考えで「数理科学」（サイエンス社発行）に「流体数学のすすめ II．超関数論」の連載をはじめたのが 1975 年 8 月であった．途中 1 年足らずの休載期間があったが，1979 年 2 月，26 回で連載は完結した．著者が大阪大学基礎工学部に勤務していた 3 年間にほぼ相当する期間である．その内容の一部は大阪大学基礎工学部，大阪府立大学工学部，工学院大学，Cornell 大学航空宇宙科学教室などで講義した．その経験をとり入れて連載記事を整理してできたのが本書である．

書名を「応用超関数論」としたのは，理工学の諸問題に応用できる超関数論を目指したからで，applied というより，むしろ applicable というべきものである．予備知識としては，関数論の初歩的な部分を期待するが，大学学部の物理数学あるいは応用数学で学ぶ程度のもので十分である．

第 1 章では，佐藤の超関数が流体力学でおなじみの渦層として直観的にとらえられることを述べ，このイメージを基礎にして超関数論を構成しようという

本書の目標を説明する．第2章では，超関数に関する基本的事項として，超関数の値，四則演算，微分，積分などを定義する．また，ふつうの関数を超関数に見直す操作と，逆に超関数をふつうの関数にひきもどす操作が説明される．

第3章では，超関数についての偶奇性，虚実性，形式積の概念を導入する．基本的な超関数として，ベキ型の超関数が定義される．第4章では，パラメーターを含む超関数 $f(x, \alpha)$ を考える．すなわち，α についての極限，微分，積分などの演算が具体的にとり扱われる．また，発散積分に対する Cauchy の主値や Hadamard の有限部分が超関数の積分として統一的に議論できることが示される．

以上で，ふつうの関数について行なわれる各種の計算がそのまま超関数のばあいにも適用できるようになる．

第5章から第9章までは Fourier 変換の議論である．まず，第5章では超関数の Fourier 変換の一般論が展開され，第6章ではベキ型超関数の Fourier 変換が具体的に求められる．第7章では上・下型超関数，左・右超関数の概念が導入される．第8章では，Fourier 変換が存在するための十分条件と，Fourier 変換の正則性について議論する．さらに，第9章では，Fourier 変換 $g(\xi)=\mathfrak{F}f(x)$ の $\xi\to\pm\infty$ での漸近的性質を調べる．実用上現われる関数あるいは超関数は以上の議論でほぼ完全におおわれる．

第10章では，まず，一般的に標準母関数の概念を導入し，これに基づいて周期超関数を扱う．任意の周期超関数が Fourier 級数として表わされることが示される．これによって Fourier 級数が Fourier 変換の理論に吸収されることになる．

第11章では，超関数について解析接続と一致の定理を述べる．また，1点および区間への射影という概念を導入する．これによって，超関数の定義区間が無限区間 $(-\infty, \infty)$ に拡張され，ふつうの関数を超関数に見直す操作が統一的に与えられる．第12章では，2つの超関数が特異点を共有しないばあい，およびともに上（下）型の超関数であるばあいについて，積が合理的に定義される．

第13章では超関数のたたみこみを一般的に議論し，つづく第14章では特別なばあいとして周期超関数のたたみこみをとり上げる．さらに，たたみこみの重要な特別のばあいとして，第15章では Hilbert 変換について詳細にとり扱う．Hilbert 変換が応用上重要であることを考えたからである．これに関連し

て，第16章では Poisson–Schwarz の積分公式を種々のばあいについて与える．これらの公式はある種の積分方程式の解法に利用される．

第17章では，たたみこみ型の積分方程式について，超関数による解法を説明する．最後の第18章では，Laplace 変換の理論が超関数論により Fourier 変換の理論に吸収されることを示す．

超関数をふつうの関数のように使いこなせるものにしたい．これを目標として，本書では実例計算を多数行なった．その結果得られた諸公式は，実際問題への応用の際の便宜を考えて，II巻の巻末に付録として掲載することにした．超関数のたたみこみ，Fourier 変換，Hilbert 変換の諸公式の多くは他の書物に見られないものと思う．

定理，定義，例，式，図は各章ごとに通し番号をつけた．他の章の定義，式などはたとえば定義5.6，式(14.3.6)のように引用する．これらは，5章の定義6，14章の式(3.6)の意味である．

補題，系とすべきものも，引用の便を考慮して，すべて定理とした．用語や記号も，直観的にわかりやすいことや計算の際の便宜を考えて，自分勝手なものを使った．母関数，上(下)型超関数，…などや，H.F.，G.F.，O.F.，… などである．

本書は Lighthill 教授の明快な著書と佐藤教授の独創的な着想に触発されて生まれた．ここに両教授に対して深甚な謝意を表したい．また，東大退官後の3年間を本書の構想に割くことを許して下さった阪大基礎工学部のかつての同僚諸氏の御好意に厚く感謝する．最後に，連載期間中怠り勝ちの著者を暖かく励まされた数理科学社の村松武司氏と，本書の出版にあたりいろいろお世話になったサイエンス社の橋元淳一郎，弦間和男の両氏に感謝する．

1981年4月

今井　功

第Ⅱ巻　目　　次

17 積分方程式

18 Laplace 変換

第I巻内容

11 超関数の解析接続，射影

§1. は じ め に

いま，たとえば

$$f(x)=\begin{cases}(x-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta}, & a<x<b\\ 0, & x<a,\ x>b\end{cases} \tag{1.1}$$

で定義される関数 $f(x)$ を考えよう．$\mathrm{Re}\,\alpha>-1$, $\mathrm{Re}\,\beta>-1$ ならば $f(x)$ は絶対積分可能であるから，$f(x)$ は超関数と見直すことができる．しかし，もし $\mathrm{Re}\,\alpha\leqq-1$, $\mathrm{Re}\,\beta\leqq-1$ の条件の どちらか 1 つでも満足されると，$f(x)$ をそのまま超関数と見直すことはできない．このようなばあいどうすればよいのだろうか？ まず考えられるのは つぎのような 方法であろう．すなわち，$f(x)$ の特異点が $x=a$, $x=b$ の 2 つだけであることに 注意する．そこで，点 $x=c$ を $a<c<b$ のように選び，

$$f_1(x)=\begin{cases}f(x), & x<c\\ 0, & x>c\end{cases} \tag{1.2}$$

$$f_2(x)=\begin{cases}f(x), & x>c\\ 0, & x<c\end{cases} \tag{1.3}$$

のような関数を考えると，

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x) \tag{1.4}$$

である．$f_1(x)$ の特異点は $x=a$, $x=c$ であるが，特異点 $x=c$ は単なる不連続に対応するもので，いわば 正体の知れた特異点である．特異点 $x=a$ は x^{α} の $x=0$ での特異性に相当する．同様に，$f_2(x)$ の特異点は 不連続を表わす $x=c$ と，x^{β} の $x=0$ での特異性に相当する $x=b$ の 2 点である．このように，$f_1(x)$, $f_2(x)$ は $f(x)$ 自身に比較してより簡単であるから，$f_1(x)$, $f_2(x)$ に相当する超関数をまず考え，その後でこれらを合成して $f(x)$ に相当する超関数を得ることが便利であろう．

もうひとつ考えられるのはつぎの方法である．

$$f_3(x)=|x-a|^{\alpha}H(x-a), \tag{1.5}$$

$$f_4(x)=|x-b|^{\beta}H(b-x) \tag{1.6}$$

という２つの関数を考える．容易にわかるように

$$f(x)=f_3(x)\cdot f_4(x) \tag{1.7}$$

である．実は $f_3(x)$, $f_4(x)$ は**既知**の超関数である．そこで，もしも**超関数どうしの積**というものが許されるならば，$f(x)$ が既知の超関数から ただちに 構成されることになり，はなはだ便利であろう．

以上述べた事柄は直観的にはきわめて明らかなことであるが，やはり数学的な根拠づけは必要である．これがこの章の主題である．

§2.　射　　影

まず，(1.4) のような分解に対する基礎づけを行なおう．そのために，射影の概念を導入する．

〔**定義 1**〕 区間 (a,b) とそれを含む区間 (a',b') を考える：$a'\leqq a<b\leqq b'$. 区間 (a',b') で定義された超関数 $f(x)=\mathrm{H.F.}\ F(z)$ の区間 (a,b) への**射影**を

$$f(x)H(x;a,b)\overset{\mathrm{def}}{=}\mathrm{H.F.}\ F(z;a,b), \tag{2.1}$$

$$F(z;a,b)=\frac{1}{j}\int_a^b\frac{f(t)}{t-z}dt=-\frac{1}{j}\int_{C_\varepsilon}\frac{F(t)}{t-z}dt \tag{2.2}$$

で定義する．ただし，$F(z)$ は $z=a$, $z=b$ で正則，あるいは 積分可能とする．また，t 平面上の積分路 C_ε は実数軸を２点 $t=a, t=b$ で切り，点 $t=z$ を内部に含まない よ う な閉曲線である（図１）.

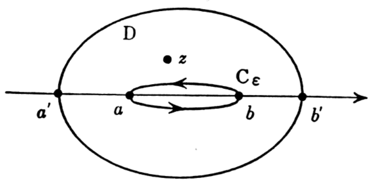


図 1

$F(z;a,b)$ は区間 (a,b) で定義された超関数 $f(x)$ の**標準母関数**（定義 10.1）にほかならない．したがって，射影 $f(x)H(x;a,b)$ は x の全区間 $(-\infty,\infty)$ に対して定義された超関数である．そして，もちろん

$$f(x)H(x;a,b)=\begin{cases}f(x), & a<x<b\\ 0, & x<a,\ x>b\end{cases}$$

である．

［**定理 1**］ 超関数 $f(x)$ は $a<x<b$ で定義され，$x=a, x=b$ および点 $x=a_p$ $(p=1,2,\cdots,N)$ で正則あるいは積分可能であるとする．このとき

$$f(x)H(x;a,b)=\sum_{p=0}^{N}f(x)H(x;a_p,a_{p+1}) \tag{2.3}$$

が成り立つ．ただし，$a_0=a$, $a_{N+1}=b$ とする．

（証明） 母関数について考えれば明らかである． すなわち，(2.2) の定義式により

$$F(z;a,b)=\sum_{p=0}^{N}F(z;a_p,\ a_{p+1})$$

が成り立つから，これの H.F. をとればよい． ∎

実は，このような展開はすでに周期超関数を議論したときに使っている．その際，$a_p=x_0+pl\ (p=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ であった．

(2.3) の右辺の各項 $f(x)H(x;a_p,a_{p+1})$ の特異点としては $f(x)$ 自身の特異点のほか $x=a_p$, $x=a_{p+1}$ があるが，$\sum$ をとるとこれらは打ち消しあって，けっきょく右辺は $f(x)H(x;a,b)$ となるのである．

$f(x)$ の定義区間が $-\infty<x<\infty$ のばあいには，

$$f(x)H(x;-\infty,a_1),\ f(x)H(x;a_N,\infty)$$

が定義されていなければならない．これらに対しては，(2.2) に対応して

$$F(z;-\infty,a_1)=\frac{1}{j}\int_{-\infty}^{a_1}\frac{f(t)}{t-z}dt,$$

$$F(z;a_N,\infty)=\frac{1}{j}\int_{a_N}^{\infty}\frac{f(t)}{t-z}dt$$

をとればよい．もし，これらの積分が収束しなければ， 収束因子 $\varphi(z)$ として実数軸上に零点をもたない適当な整関数をとり

$$f(x)H(x;-\infty,a_1)\overset{\text{def}}{=}\text{H.F.}\frac{\varphi(z)}{j}\int_{-\infty}^{a_1}\frac{f(t)}{\varphi(t)}\frac{dt}{t-z},\tag{2.4}$$

$$f(x)H(x;a_N,\infty)\overset{\text{def}}{=}\text{H.F.}\frac{\varphi(z)}{j}\int_{a_N}^{\infty}\frac{f(t)}{\varphi(t)}\frac{dt}{t-z}\tag{2.5}$$

を考えればよいのである．

§3. 解 析 接 続

(1.1) のような関数 $f(x)$ に相当する超関数を考えようとするときに，(1.4) のような和の形 $f_1(x)+f_2(x)$, または (1.7) のような積の形 $f_3(x)\cdot f_4(x)$, というぐあいに，いろいろ違った方法で新しい超関数を構成することができるように見える． 同一であると期待されるある１つの超関数 $f(x)$ に対して，このような任意性が付随することは非常に望ましくないことであろう．このような疑惑に解決を与えてくれるのが超関数に関する一致の定理である．

準備として，関数論でよく知られているつぎの２つの定理をあげておこう．

[定理 2]（**一致の定理**）　$F_1(z), F_2(z)$ が領域Dで正則で，かつD内の曲線分Lの上で $F_1(z)=F_2(z)$ であるとすれば，Dにおいて $F_1(z)=F_2(z)$ である（図2）．

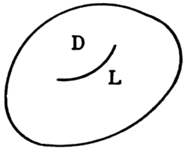


図 2

[定理 3]（**解析接続の定理**）　$F_1(z), F_2(z)$ はそれぞれ領域 D_1, D_2 で正則であって，かつ共通領域 $D_1 \cap D_2$ 内の曲線分Lの上で $F_1(z)=F_2(z)$ であるとする．このとき

$$F(z) = \begin{cases} F_1(z), & z \in D_1 \\ F_2(z), & z \in D_2 \end{cases}$$

で定義される $F(z)$ は和領域 $D_1 \cup D_2$ で正則な解析関数である（図3）．

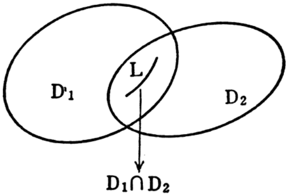


図 3

これらの定理の証明は関数論の教科書にゆずる．

定理2によれば，異なる領域で定義された2つの解析関数 $F_1(z), F_2(z)$ が，共通領域（の一部）で一致すれば，1つの解析関数 $F(z)$ に融合することがわかる．$F(z)$ を $F_1(z)$ および $F_2(z)$ の**解析接続**という．また，$F_1(z)$ と $F_2(z)$ はたがいに他の解析接続であるという．

さて，超関数についてつぎの定理が成り立つ．

[定理 4]　超関数 $f(x)$ が $a<x<b$ で正則で，かつ $a'<x<b'(a<a', b'<b)$ で $f(x)=0$ であれば，実は $a<x<b$ で $f(x)=0$ である．

（証明）　超関数 $f(x)=\mathrm{H.F.}\,F(z)$ が正則であるというのは，その母関数の上成分 $F_+(z)$，下成分 $F_-(z)$ がともに x 軸上で正則であるということである．したがって，仮定により，$F_+(z), F_-(z)$ の正則な領域 D_+, D_- は線分 (a, b) を超えてそれぞれ下・上半平面にはみ出している（図4）．さて，線分 (a', b') の上では $f(x)=0$ であるから，線分 (a', b') を含むある領域 D' で $F_+(z)=F_-(z)$ である．ここで定理3を使うと，$D_+ \cup D_- = D$ で $F_+(z)=F_-(z)$．したがって $f(x)=0,\ a<x<b$ である．▮

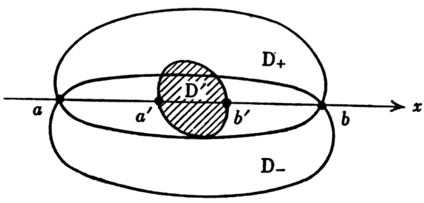


図 4

[定理 5] 区間(a,b)とそれに含まれる区間(a',b')を考える$(a<a',b'<b)$. 区間(a,b)で定義された2つの超関数$f_1(x)$, $f_2(x)$の特異点がともに区間(a',b')に含まれ，かつその区間(a',b')で$f_1(x)=f_2(x)$であるとすれば，実は全区間(a,b)で$f_1(x)=f_2(x)$である.

[定理 6]（一致の定理） 超関数$f_1(x)$, $f_2(x)$が同じ特異点をもち，かつ各特異点を含むある区間で一致すれば，実は全定義区間で一致する.

（証明） 上の2つの定理は実は本質的に同じ内容のものである. $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$について定理4を適用すればただちに証明される. ▮

[定理 7]（解析接続の定理） 超関数$f_1(x)$, $f_2(x)$はそれぞれ区間(a_1,b_1), (a_2,b_2)で定義され，区間の両端で正則，あるいはたかだか孤立特異点をもち，その共通区間(a_2,b_1)では$f_1(x)=f_2(x)$であるとする. このとき

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x), & a_1<x<b_1 \\ f_2(x), & a_2<x<b_2 \end{cases} \tag{3.1}$$

であるような超関数$f(x)$がただ1つ存在する.

（証明） 射影の概念を利用する. 適当に小さい$\varepsilon>0$をとると，仮定により$f_1(x)$は$x=a_1+\varepsilon$, $x=b_1-\varepsilon$で正則である. また$f_2(x)$は$x=a_2+\varepsilon$, $x=b_2-\varepsilon$で正則である. さらに，区間(a_2,b_1)で$f_1(x)=f_2(x)$であるから，$f_1(x)$は$x=a_2+\varepsilon$で正則，$f_2(x)$は$x=b_1-\varepsilon$で正則である. したがって，定理1により

$$f_1(x)H(x;a_1+\varepsilon,b_1-\varepsilon)$$
$$=f_1(x)H(x;a_1+\varepsilon,a_2+\varepsilon)+f_1(x)H(x;a_2+\varepsilon,b_1-\varepsilon),$$
$$f_2(x)H(x;a_2+\varepsilon,b_2-\varepsilon)$$
$$=f_2(x)H(x;a_2+\varepsilon,b_1-\varepsilon)+f_2(x)H(x;b_1-\varepsilon,b_2-\varepsilon)$$

が成り立つ（図5）.

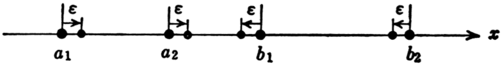


図 5

いま

$$f(x)=f_1(x)H(x;a_1+\varepsilon,a_2+\varepsilon)$$
$$+f_{1,2}(x)H(x;a_2+\varepsilon,b_1-\varepsilon)+f_2(x)H(x;b_1-\varepsilon,b_2-\varepsilon)$$

を考えよう. ただし，$f_{1,2}(x)=f_1(x)=f_2(x)$, $a_2<x<b_1$とする. 明らかに

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x), & a_1+\varepsilon<x<b_1-\varepsilon \\ f_2(x), & a_2+\varepsilon<x<b_2-\varepsilon \end{cases}$$

である．ε はいかほどでも小さく選べるから，たしかに (3.1) を満足する $f(x)$ が存在することがわかる．このような $f(x)$ がただ1つにかぎることは，定理6（一致の定理）の保証するところである．▮

この定理は解析関数に関する定理3に対応するものである．そこで，解析関数のばあいにならって，つぎの定義を導入することにしよう．

〔**定義 2**〕 $a_1<a_2<b_1<b_2$ とするとき，(3.1) で与えられる $f(x)$ を $f_1(x)$, $f_2(x)$ の**解析接続**という． また，$f_1(x), f_2(x)$ はたがいに他の解析接続であるという．

さて，超関数といっても，特異点以外では（ばあいによっては特異点でも）ふつうの関数と見直すことができる．すなわち，

$$\mathrm{O.F.}f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\{F_+(x+i\varepsilon)-F_-(x-i\varepsilon)\} \tag{3.2}$$

で定義される**ふつうの関数** O.F.$f(x)$ を考えればよい． とくに，$f(x)$ の正則点，すなわち $F_+(z), F_-(z)$ が正則な点では，(3.2) は

$$\mathrm{O.F.}f(x) = F_+(x)-F_-(x) \tag{3.3}$$

と簡単化され，O.F.$f(x)$ はふつうの解析関数を表わすのである．

ふつうの関数 O.F.$f(x)$ について一致の定理を述べるとどうなるのであろうか？ これについてはつぎの定理が成り立つ．

[**定理 8**] 超関数 $f(x)$ がたかだか孤立特異点 $x=a_p(p=1,2,\cdots)$ をもち，かつ O.F.$f(x)=0$ であるとすれば

$$f(x) = \sum_{p,n} A_{pn}\delta^{(n)}(x-a_p),\quad n=\text{奇数} \tag{3.4}$$

である．ただし，A_{pn} は定数である．

（証明） 特異点の1つを $x=a$ とする． $x=a+\xi$ とおけば，適当に小さい $\xi(\neq 0)$ に対して $f(x)$ は正則，したがって (3.3) により

$$\mathrm{O.F.}f(x) = F_+(x)-F_-(x) = 0,\quad 0<|\xi|<\varepsilon$$

と書ける．すなわち，解析関数 $F_+(z), F_-(z)$ は x 軸上の線分 $(a-\varepsilon, a)$ および $(a, a+\varepsilon)$ の上で一致する．したがって，定理3により，$F_+(z)$, $F_-(z)$ はたがいに他の解析接続であって，実は同一の解析関数 $F(z)$ である．$F_+(z)$, $F_-(z)$ はそれぞれ上・下半平面で1価正則であるから，$F(z)$ は $z=a$ の近傍で1価正則である．したがって

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(z-a)^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty} B_n(z-a)^n \tag{3.5}$$

のように Laurent 級数に展開される．

さて，点 $x=a$ では，(3.2) により

$$\text{O.F.}f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\sum_{n=1}^{\infty} A_n\{(i\varepsilon)^{-n}-(-i\varepsilon)^{-n}\}+\sum_{n=0}^{\infty} B_n\{(i\varepsilon)^{n}-(-i\varepsilon)^{n}\}\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{n=1}^{\infty} 2A_n(i\varepsilon)^{-n},\quad n=\text{奇数}$$

である．仮定により O.F.$f(x)=0$ であるから，$A_n=0$ (n=奇数) でなければならない．したがって，(3.5) は

$$F(z) \cong \sum_{n=\text{偶}} A_n(z-a)^{-n} \tag{3.6}$$

となる．(3.5) の右辺の第2項は $z=a$ の近傍で正則だから，同等記号 $\cong$ を使えばこれを省略できるのである．δ 関数の母関数は $\delta(z)=-(jz)^{-1}$ であるから

$$(z-a)^{-n}=j\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\delta^{(n-1)}(z-a).$$

したがって，(3.6) の H.F. をとると (3.4) が得られる．もちろん，a の代りに各特異点に相当して a_p を用いなければならない．▮

[定理 9] 超関数 $f_1(x), f_2(x)$ に対して O.F.$f_1(x)$=O.F.$f_2(x)$ が成り立つならば，$f_1(x)$ と $f_2(x)$ は δ 関数の奇数階微分の線形結合を除いて一致する．

(証明) $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$ に対して定理8を適用すればよい．▮

定理9を応用すると，超関数に関する一致の定理 (定理5, 定理6) および解析接続の定理 (定理7) を，$f(x)$ のかわりに O.F.$f(x)$ を使っていい表わすことができる．その際，"δ 関数の奇数階微分を除いて" という但し書きをつけ加えさえすればよい．

ここで，§1で述べたことを振りかえってみよう．(1.1) で定義される関数を超関数と見直そうとするときに任意性がつきまとうのではないかという心配は，上の定理9によって解消するのである．

§4. 一般 δ 関数

Dirac の δ 関数 $\delta(x)$ は，$x\neq 0$ に対しては0に等しい．$\delta(x)$ の逐次微分 $\delta^{(n)}(x)$ も同じ性質をもっている．そこで，このような性質をもつ超関数を一般 δ 関数とよぶことにして，つぎのように定義しておく．

〔定義 3〕 1点 $x=a$ を除いて0に等しい超関数を点 $x=a$ での**一般 δ 関数**とよび，これを記号 $\delta_\infty(x-a)$ で表わす．また，偶および奇の一般 δ 関数をそ

れぞれ $\delta_\infty^e(x-a)$, $\delta_\infty^o(x-a)$ で表わす．

[定理 10]　一般 δ 関数はつぎのように表わされる．ただし，A_n は定数である．

$$\delta_\infty(x-a)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\delta^{(n)}(x-a),$$

$$\delta_\infty^e(x-a)=\sum_{n=\text{偶}}^{\infty}A_n\delta^{(n)}(x-a),$$

$$\delta_\infty^o(x-a)=\sum_{n=\text{奇}}^{\infty}A_n\delta^{(n)}(x-a).$$

（証明）　定理 8 の証明の前半を見れば明らかである．▮

なお，一般 δ 関数に対する上の表現で $A_n=0\ (n>N)$ のばあい，$\delta_N(x-a)$, $\delta_N^e(x-a)$, $\delta_N^o(x-a)$ のように表わす．すなわち，δ 関数の N 階微分までの線形結合で表わされるばあいである．

[定理 11]　孤立点を除いてたがいに等しい 2 つの超関数は，一般 δ 関数を除いて一致する．

（証明）　2 つの超関数の差に対して一般 δ 関数の定義を適用すれば明らかである．▮

§5．標 準 超 関 数

区間 (a,b) で定義されたふつうの関数 $f(x)$ を超関数と見直そうとするばあい，$f(x)$ が (a,b) で絶対積分可能であれば問題はないが，区間内の 1 点 $x=c$ で絶対積分可能性が破れると困難に遭遇する．このばあい，つぎのような方法が考えられるだろう．N を適当に大きい整数として

$$f_1(x)=(x-c)^N f(x) \tag{5.1}$$

を考える．$f_1(x)$ は絶対積分可能になるから，超関数と見直される．その母関数を $F_1(z)=\text{G.F.}f_1(x)$ として，

$$f_2(x)\overset{\text{def}}{=}\text{H.F.}\{(z-c)^{-N}F_1(z)\} \tag{5.2}$$

を考えると，この超関数 $f_2(x)$ は区間 (a,b) で

$$\text{O.F.}f_2(x)=f(x),\quad x\neq c$$

を満足する．それゆえ，$f_2(x)$ はふつうの関数 $f(x)$ を見直した超関数と考えることができる．しかし，$f_1(x)$ の母関数 $F_1(z)$ には解析関数 $\varphi(z)$ だけの不定性が伴なうから，

$$(z-c)^{-N}\varphi(z) = (z-c)^{-N}\{\varphi(c)+\varphi'(c)(z-c)+\cdots\}$$
$$= c_0(z-c)^{-N}+c_1(z-c)^{-N+1}+\cdots+c_{N-1}(z-c)^{-1}+P(z-c),$$
$$c_n = \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(c)$$

によって，(5.2) で定義される $f_2(x)$ には一般 δ 関数 $\delta_{N-1}(x-c)$ だけの不定性が伴なうことになる．ただし，上の式で $P(z-c)$ は $z-c$ のベキ級数で，したがって H.F. $P(z-c)=0$ であることと，δ 関数の母関数が $\delta(z)=-(jz)^{-1}$ であることが考慮されている．

このように，絶対積分可能性が破れるような特異点をもつふつうの関数を超関数と見直そうとするばあいには，一般 δ 関数だけの不定性が伴なうことになる．そこで，$f_2(x)$ のうちなにか 1 つ $\tilde{f}(x)$ を適当に選び，これを $f(x)$ に対応する標準的な超関数と指定しておけば

$$f(x) = \tilde{f}(x)+\delta_\infty(x-c)$$

と表わすことができるだろう．これをもうすこし一般的な形で定義としてまとめておこう．

〔**定義 4**〕 点 $x=a$ を含むある区間で $x=a$ を除いて一致する 2 つの超関数は，その区間で点 $x=a$ に関して**同類**であるという．$x=a$ に関して同類の超関数の族 $\{f(x)\}$ の中から適当に 1 つを選んで，これをその超関数族の**標準超関数**とよび，$\tilde{f}(x)$ で表わす．その超関数族に属する任意の超関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \tilde{f}(x)+\delta_\infty(x-a) \tag{5.3}$$

のように表わされる．同類の超関数のうち標準超関数は**一般 δ 関数を含まない超関数**という．また，(5.3) の右辺の $\delta_\infty(x-a)$ のことを，$f(x)$ の点 $x=a$ での **δ 成分**とよび，記号 $f(x)\delta(x;a)$ で表わす．

“複数の点 $x=a_p(p=1,2,\cdots)$ に関して同類”という概念についても上と同様に定義される．

§6. 射影の定義の拡張

§2 では，区間 (a,b) を含むある区間 (a',b'), $a'\leqq a<b\leqq b'$ で定義された超関数 $f(x)$ について，その区間 (a,b) への射影 $f(x)H(x;a,b)$ を定義した．

$f(x)H(x;a,b)$ は x の全区間 $(-\infty,\infty)$ で定義され，

$$f(x)H(x;a,b) = \begin{cases} f(x), & a<x<b \\ 0, & x<a,\ x>b \end{cases} \tag{6.1}$$

を満足する超関数である．すなわち，もとの超関数 $f(x)$ の定義区間が (a', b') であるのに対して，射影 $f(x)H(x;a,b)$ の定義区間は $(-\infty, \infty)$ のように拡大されている．しかし，$f(x)$ は $x=a, x=b$ で正則，あるいは積分可能であることを前提としている．

さて，$f(x)$ が $x=a, x=b$ で正則性，あるいは積分可能性をもたないばあいにも，上のような好ましい性質をもつ超関数，すなわち射影を定義することはできないものだろうか？　これをつぎに考えよう．

〔**定義 5**〕（1点への射影）点 $x=a$ を含む区間で定義された超関数 $f(x)$ に対して，その $x=a$ での δ 成分すなわち $f(x)\delta(x;a)$ を，$f(x)$ の $x=a$ への**射影**という．また，射影を求める演算のことも**射影**とよび，記号 $\mathcal{P}(a)$ で表わす．すなわち

$$\mathcal{P}(a)f(x) = f(x)\delta(x;a) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \delta^{(n)}(x-a) \tag{6.2}$$

であって，A_n は $f(x)$ と標準超関数 $\tilde{f}(x)$ によってきまる定数である．

〔**定義 6**〕（区間への射影）　区間 (a,b) を含む区間で定義された超関数 $f(x)$ に対して

$$f(x)H(x;a,b) = \begin{cases} f(x), & a<x<b \\ 0, & x<a, x>b \end{cases} \tag{6.3}$$

を満たし，$x=a, x=b$ で一般 δ 関数を含まない超関数 $f(x)H(x;a,b)$ を，$f(x)$ の区間 (a,b) への**射影**という．また，射影を求める演算のことも**射影**とよび，記号 $\mathcal{P}_a{}^b$ または $\mathcal{P}(a,b)$ で表わす．すなわち

$$\mathcal{P}_a{}^b f(x) \equiv \mathcal{P}(a,b)f(x) = f(x)H(x;a,b) \tag{6.4}$$

である．区間 (a,b) で正則な**ふつうの関数** $f(x)$ についても同じ定義を採用する．

（**合理性**）　このような超関数 $f(x)H(x;a,b)$ が存在することはつぎのようにしてわかる．$x=a, x=b$ で $f(x)$ は一般に積分可能ではないが，適当な1価解析関数 $\varphi(z)$ を選び，$\varphi(x)f(x)$ を積分可能にすることができる．（たとえば，$\varphi(z)=(z-a)^M(z-b)^N$ として整数 M, N を適当に大きくとる．あるいは，$\varphi(z)=\exp\{-\alpha(z-a)^{-2}-\beta(z-b)^{-2}\}$, α, $\beta>0$ とする．）したがって，定義1すなわち (2.1) により $\{\varphi(x)f(x)\}H(x;a,b)$ が存在する．そこで

$$\text{H.F.}\left[\frac{1}{\varphi(z)}\text{G.F.}\{\varphi(x)f(x)H(x;a,b)\}\right]$$

を考えると，これは確かに(6.3)を満足する．‘収束因子’ $\varphi(z)$ の選び方によって，上のH.F.は一義的にはきまらないが，それらはすべて $x=a$, $x=b$ に関して**同類**である．その中で**標準的な**超関数をとればよいのである．$f(x)$ が区間 (a,b) で正則なふつうの関数のばあいには，$\varphi(x)f(x)$ を絶対積分可能にすることができ，したがって超関数と見直すことができるから，上の議論はそのまま成り立つ．▮

[定理 12] 区間 (a,b) の内部で孤立点 a_p $(p=1,2,\cdots N)$ を除いて正則なふつうの関数 $f(x)$ は超関数と見直すことができる．すなわち

$$\sum_{p=0}^{N}\mathcal{P}(a_p,a_{p+1})f(x) \tag{6.5}$$

を考えればよい．ただし，$a_0=a$, $a_{N+1}=b$ とする．

（証明） 射影の定義から明らかである．▮

この定理は，これまでふつうの関数を超関数に見直すときに用いた方法を総括したものである。

例 1 下の諸式で，左辺の $x^\alpha,(-x)^\alpha,\cdots$ はふつうの関数，また右辺の $|x|^\alpha H(x)$, $|x|^\alpha H(-x),\cdots$ は超関数である．

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_0{}^\infty x^\alpha &= |x|^\alpha H(x),\\
\mathcal{P}_{-\infty}{}^0(-x)^\alpha &= |x|^\alpha H(-x),\\
\mathcal{P}_0{}^\infty x^\alpha(\log x)^n &= |x|^\alpha(\log|x|)^n H(x),\\
\mathcal{P}_{-\infty}{}^0|x|^\alpha(\log|x|)^n &= |x|^\alpha(\log|x|)^n H(-x).
\end{aligned}$$

ただし，n は正の整数．α は任意の複素数であって，負の整数でもよい．

例 2 $f(x)=\dfrac{1}{||x|-a|}$, $a>0$

$f(x)$ は $x=0,\pm a$ を除いて正則である．したがって，上の定理12により超関数と見直すことができる．これを**既知の**超関数で表わしてみよう．容易にわかるように

$$f(x)=\begin{cases}-(x+a)^{-1}, & x<-a\\ (x+a)^{-1}, & -a<x<0\\ -(x-a)^{-1}, & 0<x<a\\ (x-a)^{-1}, & x>a\end{cases}$$

であるから，定理12により

$$\begin{aligned}
f(x) &= -\mathcal{P}_{-\infty}{}^{-a}(x+a)^{-1}+\mathcal{P}_{-a}{}^0(x+a)^{-1}-\mathcal{P}_0{}^a(x-a)^{-1}+\mathcal{P}_a{}^\infty(x-a)^{-1}\\
&= -(x+a)^{-1}H(x;-\infty,-a)+(x+a)^{-1}H(x;-a,0)\\
&\quad -(x-a)^{-1}H(x;0,a)+(x-a)^{-1}H(x;a,\infty)\\
&= -(x+a)^{-1}H(-x-a)+(x+a)^{-1}\{H(x+a)-H(x)\}\\
&\quad -(x-a)^{-1}\{H(-x+a)-H(-x)\}+(x-a)^{-1}H(x-a).
\end{aligned} \tag{6.6}$$

ただし，第2式の第3項で $H(x;0,a)=H(x)-H(x-a)=H(-x+a)-H(-x)$ の関係を使う．したがって

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+a)^{-1}\{H(x+a)-H(-x-a)\}+(x-a)^{-1}\{H(x-a)-H(-x+a)\} \\ &\quad -\{(x+a)^{-1}H(x)-(x-a)^{-1}H(-x)\} \\ &= (x+a)^{-1}\operatorname{sgn}(x+a)+(x-a)^{-1}\operatorname{sgn}(x-a)-(a+|x|)^{-1} \\ &= |x+a|^{-1}+|x-a|^{-1}-(a+|x|)^{-1}. \end{aligned} \tag{6.7}$$

ただし，定義 9.3 により，$\psi(z)$ が1価解析関数のときの超関数 $\psi(|x|)$ の定義が使ってある．(6.7) の右辺はすべて既知の超関数である．

注意　上の $f(x)$ の変形で，(6.6) 式までは超関数として成り立つ等式であるが，それより後は特異点 $x=0, \pm a$ 以外で成り立つ．たとえば $(x-a)^{-1}H(x;0,a)$ は，区間 $(0,a)$ で定義されたふつうの関数 $(x-a)^{-1}$ の区間 $(0,a)$ への射影として，$(-\infty,\infty)$ で定義された超関数である．その特異点 $x=0$, $x=a$ を除けば，これは $(x-a)^{-1}\cdot H(x;0,a)$ のように積の形に書ける．すなわち

$$\begin{aligned} (x-a)^{-1}H(x;0,a) &= (x-a)^{-1}\cdot\{H(-x+a)-H(-x)\} \\ &= (x-a)^{-1}\cdot H(-x+a)-(x-a)^{-1}\cdot H(-x) \\ &= (x-a)^{-1}H(-x+a)-(x-a)^{-1}H(-x) \end{aligned}$$

のように，特異点以外では**射影を積**のように考えて計算することができる．最後の式で $(x-a)^{-1}H(-x+a)$ は超関数 $x^{-1}H(-x)$ の引数 x を $x-a$ におきかえた超関数である．($(x-a)^{-1}$ と $H(-x+a)$ の積ではない！）　また，$(x-a)^{-1}H(-x)$ は $(x-a)^{-1}$ と $H(-x)$ の積として超関数である．(特異点が一致しない2つの超関数の積が疑義なく定義できることは次章で述べる.）けっきょく，上の式の左辺と，右辺の最後の式とはともに超関数であって，しかも特異点以外では一致する．したがって，定理 11 により，両者は一般 δ 関数を除いて一致する．ところが，両者はともに δ 成分をもたないから，完全に一致するのである．

(6.6) 式から (6.7) 式への変形についても，厳密にいえば，上述のような確認が必要である．しかし，その必要性さえ忘れなければ，実際の計算の際にはいちいちくだくだしく念を押す必要もないだろう．要するに，“特異点以外では射影を‘Heaviside 関数との積’として扱い，最後に特異点を含めて成り立つような超関数としてまとめる”という処理法をとればよいのである．

例 3　$x^{-m}H(x)$, $m=$整数

$x^{-m}H(x)$ はふつうの関数としては $x\neq 0$ で定義されている．これを超関数と見直そうとするばあい，本来は一般 δ 関数だけの不定性がつきまとうのである．われわれの定義では

$$x^{-m}H(x) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{H.F.}[z^{-m}H(z)] \tag{6.8}$$

としている．こう定義すると，任意の正の整数 n に対して

$$x^{n}\cdot\{x^{-m}H(x)\} = x^{n-m}H(x), \tag{6.9}$$

$$\frac{d^n}{dx^n}\{x^{-m}H(x)\}=\left\{\frac{d^n}{dx^n}x^{-m}\right\}H(x)$$
$$+\frac{(-1)^m}{(m-1)!}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\cdots+\frac{1}{m+n-1}\right)\delta^{(m+n-1)}(x) \tag{6.10}$$

という関係が成り立つ（読者の演習問題とする）.

(6.8) のように定義した超関数 $x^{-m}H(x)$ を**標準超関数**と考えると，$x^n\cdot\{x^{-m}H(x)\}$ は標準超関数であるが，$d^n/dx^n\{x^{-m}H(x)\}$ はそうではない．$\delta^{(m+n-1)}(x)$ を含むからである.

いま

$$\langle x^{-1}H(x)\rangle\overset{\text{def}}{=}\frac{d}{dx}\{\log|x|H(x)\}=x^{-1}H(x), \tag{6.11}$$

$$\langle x^{-m}H(x)\rangle\overset{\text{def}}{=}\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\langle x^{-1}H(x)\rangle \tag{6.12}$$

によって超関数の 1 群 $\langle x^{-m}H(x)\rangle$ $(m=1,2,\cdots)$ を定義すると，

$$\langle x^{-m}H(x)\rangle=x^{-m}H(x)+\frac{(-1)^m}{(m-1)!}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m-1}\right)\delta^{(m-1)}(x) \tag{6.13}$$

であって，(6.9), (6.10) に対応して

$$x^n\cdot\langle x^{-m}H(x)\rangle=\langle x^{n-m}H(x)\rangle$$
$$+\frac{(-1)^{m-n}}{(m-n-1)!}\left(\frac{1}{m-1}+\frac{1}{m-2}+\cdots+\frac{1}{m-n}\right)\delta^{(m-n-1)}(x), \tag{6.14}$$

$$\frac{d^n}{dx^n}\langle x^{-m}H(x)\rangle=\left\langle\left\{\frac{d^n}{dx^n}x^{-m}\right\}H(x)\right\rangle \tag{6.15}$$

が成り立つ（読者の演習問題とする).

すなわち，$\langle x^{-m}H(x)\rangle$ を標準超関数に指定すると，$d^n/dx^n\langle x^{-m}H(x)\rangle$ が標準超関数であるのに対して，$x^n\cdot\langle x^{-m}H(x)\rangle$ はそうではない.

$x^{-m}H(x)$ と $\langle x^{-m}H(x)\rangle$ はもちろん**同類**であって，いずれもふつうの関数 $x^{-m}H(x)$ を超関数と見直したものである．どちらを標準超関数と見なすかはあくまで便宜的なものである．Lighthill は $\langle x^{-m}H(x)\rangle$ を標準的なものとして採用している．もちろん標準超関数という概念は Lighthill の書物にはない．超関数は何回でも微分できるということと，x^{-1} の逐次微分によって x^{-m} が得られるということを手がかりとして，超関数 $x^{-m}H(x)$ を超関数 $x^{-1}H(x)$ の逐次微分によって定義するのである．しかし，Lighthill のやり方では，δ 成分には目をつぶり，それによる不定性は放置したままである．そのため，たとえば $\mathfrak{F}\{x^{-m}H(x)\}$ にも不定性が残っている.

佐藤の超関数論の立場で母関数によって超関数を定義するばあいには，われわれの採用した定義 (6.8) が，ふつうの関数 $x^{-m}H(x)$ を見直した超関数としてもっとも自然であり，かつ便利なものと思う.

§7.　射影に関する定理

超関数 $f(x)$ を区間 (a,b) に射影するのに，定義 1 では，$f(x)$ が $x=a, x=b$

で正則あるいは積分可能であることが必要であった．射影の概念を拡張して，**区間への射影**のほか**点への射影**を定義することによって，そのような制限はなくなる．その結果，以下に述べる諸定理が射影について成り立つことになる．

[定理 13]　区間 (a, b) を含む区間で定義された任意の超関数 $f(x)$ について，$a<c<b$ に対して

$$\mathcal{P}_a{}^b f(x) = \mathcal{P}_a{}^c f(x) + \mathcal{P}(c) f(x) + \mathcal{P}_c{}^b f(x) \tag{7.1}$$

が成り立つ．また，一般に $a<a_1<a_2<\cdots<a_N<b$ に対して

$$\mathcal{P}_a{}^b = \sum_{p=0}^{N} \mathcal{P}(a_p, a_{p+1}) + \sum_{p=1}^{N} \mathcal{P}(a_p) \tag{7.2}$$

が成り立つ．ただし，$a_0=a$, $a_{N+1}=b$ とする．

（証明）　射影の定義によれば，(7.1) の両辺は点 $x=a, b, c$ を除いて一致する．したがって，定理 11 により，これらの 3 点での一般 δ 関数を除けば両辺は一致する．ところが，$x=a$, $x=b$ では両辺は δ 成分をもたず，また $x=c$ での δ 成分はともに $\mathcal{P}(c)f(x)$ であるから，そこでも一致する．けっきょく (7.1) が成り立つ．(7.2) についても同様である．∎

この定理は定理 1 の拡張に相当する．

[定理 14]　1 点への射影について

$$\mathcal{P}(a)\mathcal{P}(b) = \begin{cases} \mathcal{P}(a), & a=b \\ 0, & a\neq b \end{cases} \tag{7.3}$$

が成り立つ．

[定理 15]　区間への射影について

$$\mathcal{P}(a_1, b_1)\mathcal{P}(a_2, b_2) = \mathcal{P}(a_2, b_2)\mathcal{P}(a_1, b_1) = \mathcal{P}(a, b), \tag{7.4}$$
$$a = \max(a_1, a_2), \quad b = \min(b_1, b_2)$$

が成り立つ．また，一般に

$$\mathcal{P}(a_1, b_1)\mathcal{P}(a_2, b_2)\cdots\mathcal{P}(a_n, b_n) = \mathcal{P}(a, b), \tag{7.5}$$
$$a = \max(a_1, a_2, \cdots, a_n), \quad b = \min(b_1, b_2, \cdots, b_n)$$

が成り立つ．

[定理 16]　1 点への射影と区間への射影について

$$\mathcal{P}(a, b)\mathcal{P}(c) = \mathcal{P}(c)\mathcal{P}(a, b) = \begin{cases} \mathcal{P}(c), & a<c<b \\ 0, & c\leqq a,\ b\geqq c \end{cases} \tag{7.6}$$

が成り立つ．

上の3つの定理は容易に証明できる．読者にまかせる．▌

例 4 つぎの諸式の意味を考えよ．

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_a{}^b 1 &\equiv \{1\}H(x;a,b) = H(x;a,b)\\ &= H(x-a)-H(x-b) = H(b-x)-H(a-x),\\ \mathcal{P}_0{}^\infty 1 &\equiv \{1\}H(x;0,\infty) = H(x),\\ \mathcal{P}_0{}^\infty H(x) &= \mathcal{P}_0{}^\infty \mathcal{P}_0{}^\infty 1 = \mathcal{P}_0{}^\infty 1 = H(x),\\ \mathcal{P}(a)\delta^{(n)}(x-a) &\equiv \delta^{(n)}(x-a)\delta(x;a) = \delta^{(n)}(x-a),\\ \mathcal{P}(0)H(x) &\equiv H(x)\delta(x;0) = 0,\\ H(x)H(x;0,\infty) &= H(x).\end{aligned}$$

注意 $\mathcal{P}(a,b)$ は開区間 (a,b) への射影である．区間の端を含む射影，すなわち $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,b]$ への射影を表わすために，つぎのような記法を用いると便利なことがある．

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(a-0,b) &\equiv \mathcal{P}(a)+\mathcal{P}(a,b),\\ \mathcal{P}(a,b+0) &\equiv \mathcal{P}(a,b)+\mathcal{P}(b),\\ \mathcal{P}(a-0,b+0) &\equiv \mathcal{P}(a)+\mathcal{P}(a,b)+\mathcal{P}(b),\\ \mathcal{P}(a-0,a+0) &\equiv \mathcal{P}(a).\end{aligned}$$

この記法によれば，$\mathcal{P}(a,b)$ は $\mathcal{P}(a+0,b-0)$ に相当する．

［定理 17］ $\varphi(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で正則な解析関数，$f(x)$ は任意の超関数とする．このとき

$$\mathcal{P}_a{}^b\{\varphi(x)f(x)\} = \varphi(x)\mathcal{P}_a{}^b f(x), \tag{7.7}$$

$$\mathcal{P}(c)\{\varphi(x)f(x)\} = \varphi(x)\mathcal{P}(c)f(x) \tag{7.8}$$

が成り立つ $(a<c<b)$．

（証明） 射影の定義6により

$$\mathcal{P}_a{}^b f(x) = \begin{cases} f(x), & a<x<b\\ 0, & x<a,\ x>b\end{cases} \tag{7.9}$$

$$\mathcal{P}_a{}^b\{\varphi(x)f(x)\} = \begin{cases} \varphi(x)f(x), & a<x<b\\ 0, & x<a,\ x>b\end{cases} \tag{7.10}$$

は $(-\infty,\infty)$ で定義された超関数である．$\varphi(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で正則であるから，(7.7) の右辺は超関数 $\mathcal{P}_a{}^b f(x)$ と $\varphi(x)$ の積として定義される．$x \fallingdotseq a,b$ では (7.7) の等式は明らかに成り立つ．しかも両辺は $x=a,b$ で一般 δ 関数を含まないから，$(-\infty,\infty)$ の全区間で (7.7) が成り立つ．

つぎに (7.8) を証明する．(7.1) により，(7.7) は

$$\{\mathcal{P}_a{}^c+\mathcal{P}(c)+\mathcal{P}_c{}^b\}\varphi(x)f(x) = \varphi(x)\{\mathcal{P}_a{}^c+\mathcal{P}(c)+\mathcal{P}_c{}^b\}f(x)$$

と書ける．ここで (7.7) を利用する．すなわち，(7.7) の $\mathcal{P}_a{}^b$ のかわりに $\mathcal{P}_a{}^c$,

$\mathcal{P}_c{}^b$ としたものを使うと，$\mathcal{P}(c)$ の項だけが残り (7.8) を与える．∎

[定理 18]　$\varphi(x)$ が超関数であっても，もし積 $\varphi(x)\cdot f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で存在し，かつ $\varphi(x)$ が $x=c$ で正則であれば，定理 17 はそのまま成り立つ．

（証明）　定理 17 の証明と本質的に同じである．ただし，超関数の積については次章で述べる．∎

[定理 19]　超関数 $f(x)$ が $f(a\pm0)$, $f(b\pm0)$ をもつならば

$$\frac{d}{dx}\mathcal{P}_{a'}{}^{b'}f(x) = \mathcal{P}_{a'}{}^{b'}f'(x)+f(a')\delta(x-a)-f(b')\delta(x-b), \quad (7.11)$$

$$\frac{d}{dx}\mathcal{P}(a)f(x) = \mathcal{P}(a)f'(x)-\{f(a+0)-f(a-0)\}\delta(x-a) \quad (7.12)$$

が成り立つ．ただし，$a'=a\pm0$, $b'=b\pm0$（複号の組み合わせは任意）．また，$a=-\infty$, $b=\infty$ でもよい．

（証明）　まず $b=\infty$ のばあいについて (7.11) を証明する．$x\neq a$ ではもちろん

$$\frac{d}{dx}\mathcal{P}_a{}^\infty f(x) = \mathcal{P}_a{}^\infty f'(x), \quad x\neq a$$

である．両辺は超関数であるから，定理 9 により，一般 δ 関数 $\delta_\infty(x-a)$ を除いて一致する．ところが $\mathcal{P}_a{}^\infty f'(x)$, $\mathcal{P}_a{}^\infty f(x)$ は $\delta_\infty(x-a)$ を含まない．それゆえ，上式の右辺は $\delta_\infty(x-a)$ を含まず，左辺は $\mathcal{P}_a{}^\infty f(x)$ の $x=a$ での不連続 $f(a+0)-0$ にもとづく $f(a+0)\delta(x-a)$ を含むだけである．したがって

$$\frac{d}{dx}\mathcal{P}_a{}^\infty f(x) = \mathcal{P}_a{}^\infty f'(x)+f(a+0)\delta(x-a) \quad (7.13)$$

が成り立つ．これは (7.11) で $b=\infty$, $a'=a+0$ のばあいである．同様に

$$\frac{d}{dx}\mathcal{P}_{-\infty}{}^a f(x) = \mathcal{P}_{-\infty}{}^a f'(x)-f(a-0)\delta(x-a) \quad (7.14)$$

が得られる．

(7.13) と (7.14) とを加えて，$\mathcal{P}_{-\infty}{}^a+\mathcal{P}_a{}^\infty = \mathcal{P}_{-\infty}{}^\infty-\mathcal{P}(a)$ に注意すれば，(7.12) が得られる．

つぎに，$b\neq\infty$，たとえば $a'=a-0$, $b'=b+0$ のばあいを考えよう．上の注意で述べた記法を想い起こすと

$$\mathcal{P}_{a'}{}^{b'} = \mathcal{P}_{a-0}{}^{b+0} = \mathcal{P}_{a-0}{}^\infty-\mathcal{P}_{b+0}{}^\infty = \mathcal{P}(a)+\mathcal{P}_a{}^\infty-\mathcal{P}_b{}^\infty$$

である．そこで，(7.12) と (7.13) の関係を使うと容易に (7.11) が得られる．a', b' のほかのばあいも同様である．∎

例 5　$f(x)=1, H(x)$; $a'=+0, -0$; $b=\infty$ について定理 19 を確かめよ.

$f(x)$	1	$H(x)$	
$\mathcal{P}_{a'}{}^{\infty} f(x)$	$H(x)$	$H(x)$	
$\dfrac{d}{dx}\mathcal{P}_{a'}{}^{\infty} f(x)$	$\delta(x)$	$\delta(x)$	
$f'(x)$	0	$\delta(x)$	
a'	± 0	-0	$+0$
$f(a')$	1	0	1
$\mathcal{P}_{a'}{}^{\infty} f'(x)$	0	$\delta(x)$	0

例 6　$f(x)$ が $x=0$ で正則であれば, $\mathcal{P}_{-0}{}^{\infty} f(x)=f(x)\cdot H(x)$ である. また $f(\pm 0)=f(0)$ が存在する. このばあいについて定理 19 を確かめよ.

例 7　つぎの関係が成り立つ.

$$\mathcal{P}_{-0}{}^{\infty} f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}\mathcal{P}_{-0}{}^{\infty} f(x) - \sum_{m=0}^{n-1} f^{(m)}(-0)\delta^{(n-m-1)}(x). \tag{7.15}$$

ただし $f^{(m)}(-0)$ $(m=0, 1, \cdots, n-1)$ が存在するものとする.

ヒント　定理 19 と数学的帰納法を使えばよい.

定理 19 は $f(a\pm 0)$, $f(b\pm 0)$ の存在を前提としている. したがって $f(x)=1/x$, $a=0$ のばあいなどには適用できない. しかし, $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ のように分解して, $f_1(x)$ は上の前提条件を満足し, $f_2(x)$ は素性の知れた超関数であるようにできるばあいには, 利用価値がある.

§8.　発散積分の有限部分

ふつうの関数 $f(x)$ の定積分 $\int_a^b f(x)dx$ が発散するばあいに, その**有限部分**というものを定義 4.5 で定義した. これは, いわゆる **Cauchy の主値**と **Hadamard の有限部分**を特別なばあいとして含むものであった. しかし, 定義 4.5 で有限部分が定義されるためには $f(x)$ がある種の条件を満たすことが必要であった. ところが, 射影の概念を導入することによって, きわめて一般的に有限部分を定義することができるのである.

そのために, まず準備として, つぎのほとんど自明の定理を挙げておこう.

[定理 20]　任意の超関数 $f(x)$ の定積分について

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_a{}^b f(x)dx \tag{8.1}$$

が成り立つ. ただし, $f(x)$ は $x=a, x=b$ で正則あるいは積分可能とする.

（証明） $\mathcal{P}_a{}^b f(x) = f(x)\,(a<x<b)$, $0\,(x<a, x>b)$ の関係と，$x=a, x=b$ で $f(x)$ が積分可能であることから明らかである． ▮

さて，ふつうの関数 $f(x)$ についても，孤立点を除いて正則なばあいには，定理 12 により $\mathcal{P}_a{}^b f(x)$ が超関数として定義されるから，(8.1) の右辺の積分は意味をもつ．そこで，つぎのような定義を採用する．

〔**定義 7**〕 ふつうの関数 $f(x)$ の定積分について，**有限部分**をつぎのように定義する．

$$\mathrm{pf}\int_a^b f(x)\,dx \overset{\mathrm{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_a{}^b f(x)\,dx. \tag{8.2}$$

（**合理性**） 区間 (a, b) 内の $f(x)$ の特異点を a_p $(p=1, 2, \cdots, N)$ とすれば，定理 12 により，

$$\mathcal{P}_a{}^b f(x) \equiv \sum_{p=0}^{N} \mathcal{P}(a_p, a_{p+1}) f(x)$$

は一般 δ 関数を含まない超関数で，かつ $x<a$, $x>b$ では 0 に等しい．したがって (8.2) の右辺の定積分が存在する．しかも，$\int_a^b f(x)dx$ が存在するばあいには，これと (8.2) の右辺は等しい．したがって，(8.2) の右辺は‘発散積分の有限部分’としてふさわしいものである． ▮

(8.1) と (8.2) をあわせ考えると，有限部分の定義として単純明快な表現

$$\mathrm{pf}\int_a^b f(x)_{\mathrm{O.F.}}\,dx \overset{\mathrm{def}}{=} \int_a^b f(x)_{\mathrm{H.F.}}\,dx \tag{8.3}$$

を採用してもよいことがわかる．ただし，左辺の $f(x)$ はふつうの関数，右辺の $f(x)$ はそれを見直した超関数である．しかし，‘$f(x)$ を見直した超関数’であることが明示されている点で，やはり (8.2) の表現を使う方が便利であると思われる．

なお，一言つけ加えると，定理 20 の (8.1) 式では，超関数 $f(x)$ は一般 δ 関数を含んでいてもよい．これに反して定義 7 の (8.2) 式では，$f(x)$ は一般 δ 関数を含まないのである（ふつうの関数として当然！）．

§9. ま と め

複雑な超関数を簡単な超関数に分解することは，その超関数の性質を調べる上でも，また応用上も有利である．その際，超関数をある区間に射影するという概念が重要な役割を演ずる．そこで，まず，異なる区間で定義された 2 つの

超関数について，一致の定理，解析接続などの概念を導入した．つぎに，1点のみで0と異なる超関数として一般δ関数を定義した．1点への射影および区間への射影という概念を導入することによって，任意の区間で定義された超関数はすべて無限区間$(-\infty, +\infty)$で定義された超関数と見直すことができる．また，ふつうの関数を超関数に見直す操作を統一的に与えることができる．これに付随して，‘発散積分の有限部分’を一般的に定義することが可能になった．

12 超関数の積

§1. はじめに

§1.6で述べたように，ふつうの関数とできるだけ緊密な対応関係をもつように超関数を構成したいというのがわれわれの希望である．四則演算についていえば，和と差をつくることは線形結合としてもちろん可能である．しかし，積と商については問題がある．実際，Schwartzの超関数論のように線形演算に基礎をおく理論では，そもそも超関数の積なるものを考えること自身無意味ではないかというようにも思われる．（実は筆者も最初そのように誤解していた！）もっとも典型的な超関数であるδ関数について，その2乗$\delta(x)\cdot\delta(x)$が合理的に定義できないという事実も，このような誤解を生む原因のひとつであろう．

しかし，'任意'の超関数どうしの積が合理的に定義できないにしても，超関数になんらかの制限を設ければ必ずしも積が定義できないということにはならない．たとえば，超関数と（x軸上で正則な）解析関数との積はすでに合理的に定義されている．解析関数は超関数と見直されるのであるから，このばあい，超関数と超関数の積が合理的に定義されるわけである．また，1価解析関数を見直した超関数どうしの積も，すでに§3.6で定義されている．このような点を考慮して，積が合理的に定義できるような超関数の範囲をひろげることを試みよう．

§2. 超関数の積

超関数$f(x)=\text{H.F.}\ F(z)$と解析関数$\varphi(x)$の積は，すでに

$$\varphi(x)\cdot f(x)\overset{\text{def}}{=}\text{H.F.}\{\varphi(z)F(z)\} \tag{2.1}$$

として定義されている．ただし，$\varphi(z)$はx軸上で正則とする．いま，区間(a,b)で2つの超関数$f_1(x)$, $f_2(x)$が定義されているばあい，もしも$f_1(x)$が区間(a,b)で正則であれば，これをふつうの解析関数と見直して$f_2(x)$との積をつくるというのはきわめて自然な考え方であろう．実際，$f_1(x)$が正則なばあい，

$\mathrm{O.F.} f_1(x)=F_{1+}(x)-F_{1-}(x)$ は x 軸上で正則な解析関数 $F_{1+}(z)-F_{1-}(z)$ の x 軸上での値を表わすからである．こうして，つぎの定義が導入される．

〔定義 1〕 超関数 $f_1(x)=\mathrm{H.F.}\,F_1(z)$, $f_2(x)=\mathrm{H.F.}\,F_2(z)$ は区間 (a,b) で定義され，かつ $f_1(x)$ は正則であるとする．このとき

$$f_1(x)\cdot f_2(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\mathrm{O.F.} f_1(x)\}\cdot f_2(x)$$
$$= \mathrm{H.F.}\,[\{F_{1+}(z)-F_{1-}(z)\}F_2(z)] \tag{2.2}$$

によって積を定義する．(**積の記号**'・'の前には正則な超関数，'・'の後には一般の超関数を書く．)

[定理 1] 区間 (a,b) で超関数 $f_1(x)$, $f_2(x)$ がともに正則であれば

$$f_1(x)\cdot f_2(x) = f_2(x)\cdot f_1(x) \tag{2.3}$$

が成り立つ．

(証明) 積の定義により

$$f_1(x)\cdot f_2(x) = \mathrm{H.F.}\,[\{F_{1+}(z)-F_{1-}(z)\}F_2(z)],$$
$$f_2(x)\cdot f_1(x) = \mathrm{H.F.}\,[\{F_{2+}(z)-F_{2-}(z)\}F_1(z)].$$

ところが

$$\{F_{1+}(z)-F_{1-}(z)\}F_2(z)-\{F_{2+}(z)-F_{2-}(z)\}F_1(z)$$
$$=\{F_{1+}(z)-F_{1-}(z)\}[F_{2+}(z), F_{2-}(z)]$$
$$-\{F_{2+}(z)-F_{2-}(z)\}[F_{1+}(z), F_{1-}(z)]$$
$$=[\varphi(z), \varphi(z)] \cong 0. \tag{2.4}$$

ただし，$\varphi(z)\equiv F_{1+}(z)F_{2-}(z)-F_{1-}(z)F_{2+}(z)$．(2.4) の H.F. をとれば (2.3) が得られる．∎

例 1 超関数 0 および 1 と超関数 $f(x)$ の積

$\mathrm{O.F.}\{0\}=0$, $\mathrm{O.F.}\{1\}=1$ である．したがって，(2.2) により

$$0\cdot f(x) = \mathrm{H.F.}\,[0\cdot F(z)] = \mathrm{H.F.}\{0\} = 0,$$
$$1\cdot f(x) = \mathrm{H.F.}\,[1\cdot F(z)] = \mathrm{H.F.}\,F(z) = f(x).$$

すなわち，0と1とは，これらを超関数と考えても，積についてはふつうの0と1のようにふるまう．これは自明のようであるが，やはり証明しておく必要があるのである．

つぎに，区間 (a,b) で $f_1(x)$, $f_2(x)$ がともに特異点をもつばあいを考えよう．ただし図1に示すように，それぞれの特異点には共通のものがないとする．($f_1(x)$, $f_2(x)$ の特異点をそれぞれ○印と×印で示す．) このばあい，区間 (a,b) を図のように点 $x=a_p$ $(p=1,2,\cdots,N)$ で分割すると，各部分区間 (a_p, a_{p+1}) で

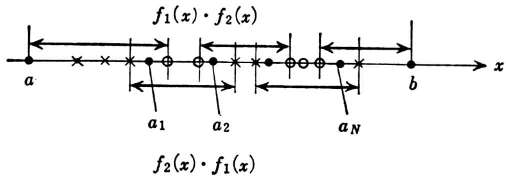


図 1

$f_1(x), f_2(x)$ のどちらか一方は正則であるから，その部分区間では $f_1(x)\cdot f_2(x)$ は意味をもつ．($f_1(x)$ が特異点をもつ区間では $f_2(x)\cdot f_1(x)$ とするべきであるが，便宜上 $f_1(x)\cdot f_2(x)$ と書く．また $a_0=a$, $a_{N+1}=b$ である．) つまり，$f_1(x)$ と $f_2(x)$ の積は部分区間ごとに定義することができる．もしもこれが滑らかにつながって1つの超関数を表わし得るならば，それを積とよぶのがふさわしいだろう．実際，それは可能なのである．

〔定義 2〕 区間 (a, b) で超関数 $f_1(x), f_2(x)$ の特異点はたかだか有限個で，かつたがいに異なるものとする．このとき

$$f_1(x)\cdot f_2(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{p=0}^{N}\{f_1(x)\cdot f_2(x)\}H(x; a_p, a_{p+1}) \tag{2.5}$$

によって**積**を定義する．ただし，区間 (a_p, a_{p+1}) では $f_1(x), f_2(x)$ のどちらか一方が正則であるように分点 $x=a_p$ $(p=1, 2, \cdots, N)$ を選ぶ $(a_0=a,\ a_{N+1}=b)$.

(合理性) 図1の x 軸の上側の矢印⟷で示した区間では $f_1(x)$ は正則であるから，$f_1(x)\cdot f_2(x)$ が定義される．また下側の矢印で示した区間では $f_2(x)\cdot f_1(x)$ が定義される．上下の矢印の重なっている区間では $f_1(x), f_2(x)$ はともに正則であるから，定理1により，$f_1(x)\cdot f_2(x)=f_2(x)\cdot f_1(x)$ である．そこで，解析接続の定理(定理 11.7)を使うと，以上のように部分区間で定義された超関数 $f_1(x)\cdot f_2(x), f_2(x)\cdot f_1(x)$ がつながって1つの超関数になることがわかる．その超関数の定義区間はもちろん (a, b) である．

さて，(2.5) の右辺が区間 (a, b) でその超関数と一致することは一致の定理(定理 11.6) によって容易に示すことができる．すなわち，両者とも，特異点は $f_1(x), f_2(x)$ のそれを合わせたものであり，かつ，それらの特異点を含む区間 $(a_p+\varepsilon, a_{p+1}-\varepsilon)$ で両者は一致するからである．(区間 (a_p, a_{p+1}) ではなくて，それよりすこし小さく $(a_p+\varepsilon, a_{p+1}-\varepsilon)$ をとったのは，(2.5) の右辺の各項 $\{f_1(x)\cdot f_2(x)\}H(x; a_p, a_{p+1})$ のもつ見掛けの特異点 $x=a_p$, $x=a_{p+1}$ が区間内に含まれないようにするためである．) ∎

(2.5) の右辺の各項は区間 (a_p, a_{p+1}) で定義された超関数 $f_1(x)\cdot f_2(x)$ の射影であるから，定義区間は $(-\infty, \infty)$ に広がっている．したがって，(2.5) で定義される積 $f_1(x)\cdot f_2(x)$ の定義区間は実は $(-\infty, \infty)$ である．定義区間を (a, b) に制限したければ，そうしてもよい．

[定理 2] 超関数の積については，ふつうの積と同様，つぎの関係が成り立つ．

$$\begin{aligned} f_1(x)\cdot f_2(x) &= f_2(x)\cdot f_1(x), \\ \{c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x)\}\cdot f(x) &= c_1 f_1(x)\cdot f(x)+c_2 f_2(x)\cdot f(x), \\ \{f_1(x)\cdot f_2(x)\}\cdot f_3(x) &= f_1(x)\cdot\{f_2(x)\cdot f_3(x)\} \\ &= \sum_{p=0}^{N}\{f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot f_3(x)\}H(x;a_p,a_{p+1}), \\ \frac{d}{dx}\{f_1(x)\cdot f_2(x)\} &= \frac{df_1}{dx}\cdot f_2(x)+f_1(x)\cdot\frac{df_2}{dx}. \end{aligned}$$

ただし，c_1, c_2 は定数．また，a_p $(p=0,1,\cdots,N+1)$ は区間 (a_p, a_{p+1}) で $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ のうち 1 つだけが特異点をもつように選ぶ $(a_0=a,\ a_{N+1}=b)$．

（証明） 容易である．読者にまかせる．▮

[定理 3] 超関数 $f(x)$ の区間 (a, b) への射影は $f(x)$ と $H(x; a, b)$ の積に等しい．すなわち

$$f(x)H(x;a,b) = f(x)\cdot H(x;a,b) \tag{2.6}$$

である．ただし，$f(x)$ は $x=a, x=b$ で正則とする．

（証明） まず，$f(x)$ が $a\leqq x\leqq b$ で正則のばあいを考える．射影の定義により，

$$\begin{aligned} \text{G.F.}[f(x)H(x;a,b)] &= \frac{1}{j}\int_a^b \frac{f(t)}{t-z}dt \\ &= \frac{1}{j}\int_a^b \frac{f(t)-f(z)}{t-z}dt+\frac{1}{j}f(z)\int_a^b\frac{dt}{t-z} \\ &= \varphi(z)+f(z)\,\text{G.F.}\,H(x;a,b). \end{aligned}$$

ただし，$\varphi(z)=j^{-1}\int_a^b[\{f(t)-f(z)\}/(t-z)]\,dt$ は x 軸上の区間 (a, b) を含む領域で正則である．それゆえ，上式の両辺の H.F. をとると (2.6) が得られる．

つぎに，$f(x)$ が一般の超関数のばあいでも，$H(x; a, b)$ の特異点 $x=a$, $x=b$ 以外では

$$f(x)H(x;a,b) = f(x)\cdot H(x;a,b) = \begin{cases} f(x), & a<x<b \\ 0, & x<a,\ x>b \end{cases} \tag{2.7}$$

が成り立つ．ところが，特異点を含む区間 $a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$, $b-\varepsilon<x<b+\varepsilon$ では $f(x)$ は仮定により正則であるから，上にすでに証明したことから (2.7) の等式が成り立つ．したがって，一致の定理により，x の全区間 $(-\infty,\infty)$ で (2.7)，すなわち (2.6) の等式が成り立つ．∎

例 2 $f(x)$ が $x=0$ で正則であるとすれば

$$f(x)\cdot\delta(x)=f(0)\delta(x) \tag{2.8}$$

である．この関係は至極当然のことのように見える．しかし，本来は，$f(x)$ がある区間 (a,b) で正則な解析関数として定義されたときに，解析関数 $f(x)$ と超関数 $\delta(x)$ の積として得られた関係である．超関数 $f(x)$ と超関数 $\delta(x)$ の積としても (2.8) が成り立つということに注意しなければならない．定義2にしたがって証明することをおすすめする．

例 3 $\dfrac{1}{x-a}\cdot\delta(x)=-\dfrac{1}{a}\delta(x)$

これは (2.8) で $f(x)=(x-a)^{-1}$ としたものである．この結果と，例3.7でとり扱った形式積に関する (3.9.12) の関係：

$$\frac{1}{x-a}\circ\delta(x)=\frac{1}{a}\{\delta(x-a)-\delta(x)\}$$

とを比較検討してほしい．

例 4 $\delta(x-a)\cdot\delta(x)=0,\ a\neq 0$

例 5 $a_1<b_1,\ a_2<b_2$ とすれば

$$H(x\,;a_1,b_1)\cdot H(x\,;a_2,b_2)=\begin{cases}H(x\,;a,b), & a<b\\ 0, & a>b\end{cases}$$

である．ただし，$a=\max(a_1,a_2)$, $b=\min(b_1,b_2)$ とする．

§3. 超関数の積の定積分

区間 (a,b) で超関数 $f_1(x)$, $f_2(x)$ が共通の特異点をもたないばあいには (2.5) によって積を定義することができた．

さて，(2.5) の右辺の $\{f_1(x)\cdot f_2(x)\}H(x\,;a_p,a_{p+1})$ の意味を想い起こしてみよう．これは，区間 (a_p,a_{p+1}) で定義された超関数 $f_1(x)\cdot f_2(x)$——この区間では，$f_1(x)$, $f_2(x)$ のどちらか一方は解析関数であるから，超関数と解析関数の積として確かに超関数である——の同じ区間 (a_p,a_{p+1}) への射影である．したがって，射影の定義11.1により，全区間 $(-\infty,\infty)$ で定義され，$x<a_p$, $x>a_{p+1}$ では0であるような超関数である．それゆえ，それら各項の和である

$$f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x) \tag{3.1}$$

は，区間 (a,b) では $f_1(x)$ と $f_2(x)$ の積の性格をもち，$x<a$, $x>b$ では0に

等しいような，$(-\infty, \infty)$ で定義された超関数である．

われわれの目的は

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_1(x)\cdot f_2(x)dx \tag{3.2}$$

を求めることである．さて，超関数の定積分は母関数の複素積分として定義されているのであった．すなわち，$f(x)=\text{H.F.}\,F(z)$ とすれば

$$\int_a^b f(x)dx \overset{\text{def}}{=} -\int_C F(z)dz. \tag{3.3}$$

ただし，Cは2点 $z=a, z=b$ を通り $F(z)$ の正則領域内にある任意の閉曲線である．(3.3) が意味をもつためには，$F_+(z)$, $F_-(z)$ は $z=a$, $z=b$ で正則または積分可能でなければならない．

もしも，(3.3) の定義にしたがって (3.2) の定積分を求めようとすると，$f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$ の母関数を知る必要がある．しかし，与えられているのは $f_1(x)=\text{H.F.}\,F_1(z)$, $f_2(x)=\text{H.F.}\,F_2(z)$ である．したがって，この与えられた母関数 $F_1(z)$, $F_2(z)$ を使って (3.2) の定積分を求めることができれば，$f(x)$ の母関数を知る必要がなく，はなはだ便利であろう．実際それが可能であることを以下に示そう．

(2.5) を (3.2) に代入すれば

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{p=0}^{N}\int_{a_p}^{a_{p+1}} f_1(x)\cdot f_2(x)dx \tag{3.4}$$

が得られる．$f_1(x)$, $f_2(x)$ の特異点をそれぞれ○，×で表わすと，たとえば図2のような配置が見られるだろう．

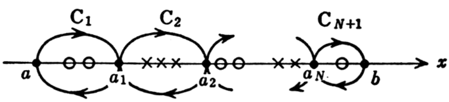


図 2

まず $\int_a^{a_1}$ を考える．区間 (a, a_1) では $f_2(x)$ は正則であるから，母関数 $F_2(z)$ の上成分 $F_{2+}(z)$, 下成分 $F_{2-}(z)$ は区間 (a, a_1) を含む領域で正則であって

$$f_2(x) = F_{2+}(x) - F_{2-}(x)$$

と書ける．したがって，(3.3) により

$$\int_a^{a_1} f_1(x)\cdot f_2(x)dx = \int_a^{a_1}\{F_{2+}(x)-F_{2-}(x)\}f_1(x)dx$$
$$= \int_{C_1}\{F_{2+}(z)-F_{2-}(z)\}F_1(z)dz.$$

ただし，積分路 C_1 をたどる向きは図2の矢印のようにする．C_1 を上半分と下半分に分解すると，上の複素積分は

$$\begin{aligned}&\int_{C_1}F_{2+}(z)F_1(z)dz-\int_{C_1}F_{2-}(z)F_1(z)dz\\&=\int_{C_{1+}}F_{1+}(z)F_{2+}(z)dz+\int_{C_{1-}}F_{1-}(z)F_{2+}(z)dz\\&\quad-\int_{C_{1+}}F_{1+}(z)F_{2-}(z)dz-\int_{C_{1-}}F_{1-}(z)F_{2-}(z)dz\\&=\int_{(++)}F_{1+}(z)F_{2+}(z)dz+\int_{(-+)}F_{1-}(z)F_{2+}(z)dz\\&\quad+\int_{(+-)}F_{1+}(z)F_{2-}(z)dz+\int_{(--)}F_{1-}(z)F_{2-}(z)dz\qquad(3.5)\end{aligned}$$

のように表わされる．ただし，積分路 $(++)$, $(+-)$, … は図3に示すようなものである．

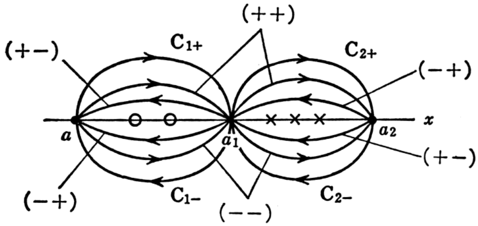


図 3

つぎに $\int_{a_1}^{a_2}$ を考える．区間 (a_1, a_2) では $f_1(x)$ が正則であるから，上と同様にして

$$\begin{aligned}&\int_{a_1}^{a_2}f_1(x)\cdot f_2(x)dx\\&=\int_{a_1}^{a_2}\{F_{1+}(x)-F_{1-}(x)\}f_2(x)dx\\&=\int_{C_2}\{F_{1+}(z)-F_{1-}(z)\}F_2(z)\,dz\\&=\int_{C_{2+}}F_{1+}(z)F_{2+}(z)dz+\int_{C_{2-}}F_{1+}(z)F_{2-}(z)dz\\&\quad-\int_{C_{2+}}F_{1-}(z)F_{2+}(z)dz-\int_{C_{2-}}F_{1-}(z)F_{2-}(z)dz\\&=\int_{(++)}F_{1+}(z)F_{2+}(z)dz+\int_{(+-)}F_{1+}(z)F_{2-}(z)dz\\&\quad+\int_{(-+)}F_{1-}(z)F_{2+}(z)dz+\int_{(--)}F_{1-}(z)F_{2-}(z)dz\qquad(3.6)\end{aligned}$$

が得られる．(3.6) の右辺は (3.5) とまったく同じ形をしている．ただし，積分路 (＋－) が，(3.5) 式では $-C_{1+}$ と同等で，したがって上半平面にあり，(3.6) 式では C_{2-} と同等で，したがって下半平面にあることに注意しなければならない．同様に，積分路 (－＋) は，(3.5) 式では下半平面に，(3.6) 式では上半平面にある．なお，積分路として (＋－) などという記号を用いたのは，被積分関数が $F_{1+}(z)F_{2-}(z)$ などであること，つまり，添字に現われる ＋，－ の順序を示すためである．

$\int_{a_2}^{a_3}$, $\int_{a_3}^{a_4}$, … についても (3.5) 式と同じ表現が得られるから，(3.4) はけっきょく

$$\int_a^b f_1(x)\cdot f_2(x)dx$$
$$=\int_{(++)}F_{1+}(z)F_{2+}(z)dz+\int_{(+-)}F_{1+}(z)F_{2-}(z)dz$$
$$+\int_{(-+)}F_{1-}(z)F_{2+}(z)dz+\int_{(--)}F_{1-}(z)F_{2-}(z)dz \qquad (3.7)$$

となる．簡単のために，今後積分路 (＋＋), (＋－), (－＋), (－－) をそれぞれ I, II, III, IV のように表わすことにしよう．これらは図4に示すようなものである．

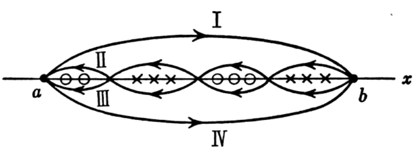


図 4

元来，1つの超関数 $f(x)=\mathrm{H.F.}\,F(z)$ はその母関数の上成分 $F_+(z)$，下成分 $F_-(z)$ という2つの解析関数によってきまるのであるから，$f_1(x)\cdot f_2(x)$ という超関数は当然4個の解析関数 $F_{1+}(z)$, $F_{1-}(z)$, $F_{2+}(z)$, $F_{2-}(z)$ によって定まるはずである．(3.7) 式は，$f_1(x)\cdot f_2(x)$ の定積分が $F_{1\pm}(z)F_{2\pm}(z)$ の複素積分として具体的に表わされることを示すものである．

以上を定理としてまとめておこう．

[定理 4] 超関数 $f_1(x)=\mathrm{H.F.}\,F_1(z)$, $f_2(x)=\mathrm{H.F.}\,F_2(z)$ が共通の特異点をもたないならば，それらの積の定積分は

$$\int_a^b f_1(x)\cdot f_2(x)dx=\int_C F_1(z)F_2(z)dz \qquad (3.8)$$

で与えられる．ただし，右辺の積分は

$$\int_C F_1(z)F_2(z)dz$$
$$\overset{\text{def}}{=}\int_{\text{I}} F_{1+}(z)F_{2+}(z)dz+\int_{\text{II}} F_{1+}(z)F_{2-}(z)dz$$
$$+\int_{\text{III}} F_{1-}(z)F_{2+}(z)dz+\int_{\text{IV}} F_{1-}(z)F_{2-}(z)dz \qquad (3.9)$$

で定義され，積分路 I，II，…は母関数 $F_1(z)$, $F_2(z)$ の上成分の特異点を上側に，下成分の特異点を下側に避けて２点 $z=a$, $z=b$ を結ぶ曲線であって，I，IVについては $a\to b$ の向きに，II，III については $b\to a$ の向きにたどる．

注意 上の定理の積分路のとり方は図４から明らかであると思われるが，これについてすこし説明を加えておこう．たとえば，$F_{1+}(z)$ の正則領域は図５の（ａ）に，$F_{2-}(z)$ の正則領域は（ｂ）に示すようなものである．したがって $F_{1+}(z)F_{2-}(z)$ の正則領域は（ｃ）のような蛇行する河川状の領域である．積分路IIはこの河川状の領域を走るのである．この領域内にあるかぎり積分路IIをどのように変形してもよいことは明らかであろう．

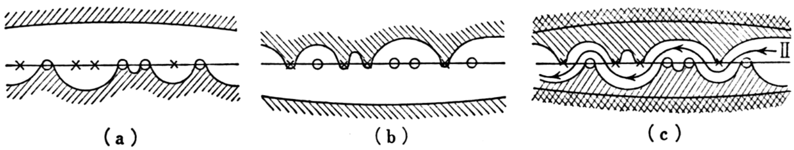


図 5

上の定理は，容易に２個以上の超関数の積のばあいに一般化される．

［定理 5］ 超関数 $f_m(x)=\text{H.F.}\,F_m(z)$ $(m=1,2,\cdots,M)$ が共通の特異点をもたないならば

$$\int_a^b f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\cdots\cdot f_M(x)dx=\sum_\sigma\int_{\text{L}\sigma} F_{1\sigma_1}(z)F_{2\sigma_2}(z)\cdots F_{M\sigma_M}dz \qquad (3.10)$$

である．ただし，$\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_M)$，$\sigma_m=+,-$，積分路 $\text{L}\boldsymbol{\sigma}\equiv\text{L}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_M)$ は $F_{m+}(z)$ の特異点を上側に，$F_{m-}(z)$ の特異点を下側に避けて $z=a$, $z=b$ を結ぶ曲線であって，σ_m が－になる個数が偶数ならば $a\to b$ の向きに，奇数ならば $b\to a$ の向きにたどる．

§4. 超関数の積の母関数

超関数を与えるということはその母関数を与えるということと同等であるから，m個の超関数の積を表わす超関数の母関数がその各因子の超関数の母関数によって表わされることは当然である．実際つぎの定理が成り立つ．

[定理 6]　共通の特異点をもたない M 個の超関数 $f_m(x)=\mathrm{H.F.}\,F_m(z)(m=1,2,\cdots,M)$ の積の母関数は

$$F(z)=\frac{1}{j}\int_C \frac{F_1(t)F_2(t)\cdots F_M(t)}{t-z}dt \tag{4.1}$$

で与えられる．ただし，右辺の積分の意味は定理5のそれと同じである．

（証明）　一般に，区間 (a,b) で定義された超関数 $f(x)=\mathrm{H.F.}\,F(z)$ の**標準母関数**は

$$\tilde{F}(z)=\frac{1}{j}\int_a^b \frac{f(x)}{x-z}dx \tag{4.2}$$

である（定義10.1)．このf(x)として $f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\cdots\cdot f_M(x)$ をとる．z は実数ではないから，$1/(x-z)$ は x の解析関数である．したがって $f_1(x)/(x-z)$ は超関数と解析関数の積として超関数であって，その母関数は $F_1(t)/(t-z)$ である.（混同を避けるために，母関数の引数を t とした！）さて，(4.2) の被積分関数は M 個の超関数 $f_1(x)/(x-z), f_2(x),\cdots,f_M(x)$ の積と考えられる．したがって，定理5により，ただちに (4.1) が得られるのである．なお，$x=a$, $x=b$ で $f(x)$ が積分可能でないばあいには，定義11.6の（合理性）で述べたように，適当な‘収束因子’ $\varphi(x)$ を選び，$f(x)/\varphi(x)$ の標準母関数を求めて，それに $\varphi(z)$ を掛ければよい．もちろん $a=-\infty$, $b=\infty$ であってもよい．∎

例 6　$\phi_1(x),\phi_2(x)$ は1価の解析関数であるとする．このとき，これを見直した超関数は

$$\left.\begin{aligned}\phi_1(x)&=\mathrm{H.F.}\{\phi_1(z)1(z)\},\\ \phi_2(x)&=\mathrm{H.F.}\{\phi_2(z)1(z)\}\end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

で定義される．これら2つの超関数の積が

$$\phi_1(x)\cdot\phi_2(x)=\mathrm{H.F.}\{\phi_1(z)\phi_2(z)1(z)\} \tag{4.4}$$

であることを確かめよう．

$\phi_1(x),\phi_2(x)$ に共通の特異点がないものと仮定する．積 $\phi_1(x)\cdot\phi_2(x)$ の母関数を $F(z)$ とすれば，定理6により

$$\begin{aligned}F(z)&=\frac{1}{j}\int_C\frac{\phi_1(t)1(t)\phi_2(t)1(t)}{t-z}dt\\ &=\frac{1}{4j}\left(\int_{\mathrm{I}}-\int_{\mathrm{II}}-\int_{\mathrm{III}}+\int_{\mathrm{IV}}\right)\frac{\phi_1(t)\phi_2(t)}{t-z}dt\end{aligned} \tag{4.5}$$

である．（$[1(t)]^2=1/4$ を考慮した．）

$\phi_1(z),\phi_2(z)$ の実数軸上の特異点（極である）をそれぞれ○，×で示す（図6）．

点 $t=z$ は積分路Cの外側になければならない．すなわち，$\mathrm{Im}\,z>0$ ならばⅠの上側に，$\mathrm{Im}\,z<0$ ならばⅣの下側にある．

積分路 Ⅱ, Ⅲ はからみあっているが，これを組みかえて上半平面を走る波状の積分路

(II′とする) と下半平面を走る積分路 (III′) に分解することができる. (II′ とIII′ は図6には示されていない!) $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ は1価であるから,

$$\int_{\mathrm{II}}+\int_{\mathrm{III}}=\int_{\mathrm{II}'}+\int_{\mathrm{III}'}=-\int_{\mathrm{I}}-\int_{\mathrm{IV}}$$

となる. II′ はIに, III′ はIVに連続的に変形できるからである. (もちろん積分路をたどる向きは逆である.) したがって (4.5) は

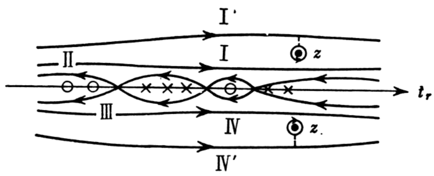


図 6

$$F(z)=\frac{1}{2j}\left(\int_{\mathrm{I}}+\int_{\mathrm{IV}}\right)\frac{\varphi_1(t)\varphi_2(t)}{t-z}dt \tag{4.6}$$

となる. つぎに積分路 I, IV を図6のように, 被積分関数の極 $t=z$ を超えて I′, IV′ に移す. その際, 極での留数がつけ加わるから

Im $z>0$ のばあい

$$\int_{\mathrm{I}}=\int_{\mathrm{I}'}+j\varphi_1(z)\varphi_2(z), \quad \int_{\mathrm{IV}}=\int_{\mathrm{IV}'},$$

Im $z<0$ のばあい

$$\int_{\mathrm{IV}}=\int_{\mathrm{IV}'}-j\varphi_1(z)\varphi_2(z), \quad \int_{\mathrm{I}}=\int_{\mathrm{I}'}$$

である. したがって (4.6) は

$$F(z)=\pm\frac{1}{2}\varphi_1(z)\varphi_2(z)+\varphi_{\mathrm{I}}(z)+\varphi_{\mathrm{IV}}(z), \quad \mathrm{Im}\, z\gtrless 0 \tag{4.7}$$

と書ける. ただし

$$\varphi_{\mathrm{I},\mathrm{IV}}(z)=\frac{1}{2j}\int_{\mathrm{I}',\mathrm{IV}'}\frac{\varphi_1(t)\varphi_2(t)}{t-z}dt$$

は x 軸上で正則な z の解析関数である. これらは母関数としては0と**同等**であるから, けっきょく, (4.7) は

$$F(z)\cong\varphi_1(z)\varphi_2(z)\mathbf{1}(z)$$

となる. これから (4.4) が得られるのである.

§5. $\mathrm{pf}\int_a^b(x-a)^\alpha(b-x)^\beta dx$

定積分

$$I=\int_a^b(x-a)^\alpha(b-x)^\beta dx \tag{5.1}$$

は Re $\alpha>-1$, Re $\beta>-1$ ならばふつうの意味で存在する. これはつぎのようにして既知関数で表わされる. すなわち, $x-a=(b-a)t$ とおけば

$$I=(b-a)^{\alpha+\beta+1}\int_0^1 t^\alpha(1-t)^\beta dt=(b-a)^{\alpha+\beta+1}B(\alpha+1,\beta+1) \tag{5.2}$$

が得られる．ここで

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt \tag{5.3}$$

はいわゆる**ベータ関数**であって，Γ 関数を使って

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \tag{5.4}$$

のように表わされることが知られている．

$\mathrm{Re}\,\alpha \leqq -1$, $\mathrm{Re}\,\beta \leqq -1$ のばあいには，(5.1) の積分は**有限部分**としてのみ意味がある．有限部分に関する定義 11.7 によると

$$\mathrm{pf}\int_a^b (x-a)^\alpha (b-x)^\beta dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_a{}^b (x-a)^\alpha (b-x)^\beta dx. \tag{5.5}$$

いま，超関数

$$f_1(x) = |x-a|^\alpha H(x-a), \tag{5.6}$$

$$f_2(x) = |b-x|^\beta H(b-x) \tag{5.7}$$

を考える．これらは既知の超関数 $|x|^\alpha H(x)$, $|x|^\beta H(x)$ の引数を $x-a$, $b-x$ でおきかえた超関数である．$f_1(x)$, $f_2(x)$ の特異点はそれぞれ $x=a$, $x=b$ である．したがって定義 2 により積 $f_1(x)\cdot f_2(x)$ が存在し

$$\begin{aligned} f_1(x)\cdot f_2(x) &= (x-a)^\alpha (b-x)^\beta H(x; a, b) \\ &= \mathcal{P}_a{}^b (x-a)^\alpha (b-x)^\beta \end{aligned} \tag{5.8}$$

である．それゆえ (5.5) は

$$\mathrm{pf}\int_a^b (x-a)^\alpha (b-x)^\beta dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\cdot f_2(x) dx \tag{5.9}$$

となる．右辺の積分はもちろん $\int_{a'}^{b'}$ $(a'<a,\ b'>b)$ としてもよい．この積分は定理 4 によって計算することができる．

定義 3.13 により

$$|x|^\alpha H(x) = \mathrm{H.F.}\frac{i(-z)^\alpha}{2\sin\pi\alpha}, \quad \alpha \neq \text{整数} \tag{5.10}$$

であるから，$f_1(x)$, $f_2(x)$ の母関数はそれぞれ

$$F_1(z) = \frac{i(a-z)^\alpha}{2\sin\pi\alpha}, \quad F_2(z) = \frac{-i(z-b)^\beta}{2\sin\pi\beta} \tag{5.11}$$

である．ただし，α, β は整数でないと仮定する．

定理 4 により

$$\int_{a'}^{b'} f_1(x)\cdot f_2(x)dx = \int_C F_1(z)F_2(z)dz. \tag{5.12}$$

ただし，C は図 7 に示す積分路 I＋II＋III＋IV である．

また，積分路 I に沿っては $F_{1+}(z)F_{2+}(z)$ を，II に沿っては $F_{1+}(z)F_{2-}(z)$ を，III に沿っては $F_{1-}(z)F_{2+}(z)$ を，IV に沿っては $F_{1-}(z)F_{2-}(z)$ を積分するのである．ところが，実はこれらの被積分関数は，(5.11) から明らかなように，同一の関数である．もっとも，それは多価関数であるから，積分路がちがえば被積分関数が（多価関数の）異なる分枝をとる恐れがある．しかし，$F_{1+}(z)$ と $F_{1-}(z)$ は x 軸上の $x<a$ で滑らかにつながり，$F_{2+}(z)$ と $F_{2-}(z)$ は $x>b$ で滑らかにつながる．

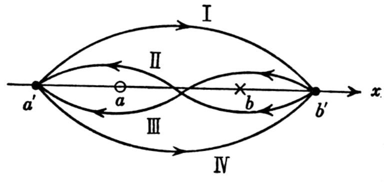


図 7

したがって，これらの積は

$$\begin{array}{ccc} \text{I} & & \text{II} \\ F_{1+}(z)F_{2+}(z) & \overset{x>b}{\longleftrightarrow} & F_{1+}(z)F_{2-}(z) \\ \updownarrow x<a & & \updownarrow x<a \\ F_{1-}(z)F_{2+}(z) & \underset{x>b}{\longleftrightarrow} & F_{1-}(z)F_{2-}(z) \\ \text{III} & & \text{IV} \end{array}$$

のように滑らかにつながる．そこで，積分路を I→II→IV→III→I のようにつなぐと，1つの解析関数 $F_1(z)\cdot F_2(z)$ の1周積分として (5.12) が表わされることになる．この積分路は記号 $(a-, b-, a+, b+)$ で表わすことができる．つまり，点 $z=a$ を負の向き（時計方向）に，$z=b$ を負の向きに，$z=a$ を正の向き（反時計方向）に，$z=b$ を正の向きに，まわるという意味である．この積分路を図8に示す．

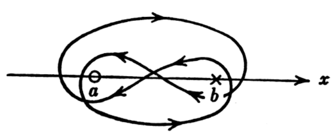


図 8

こうして，(5.9) は

$$\text{pf}\int_a^b (x-a)^\alpha (b-x)^\beta dx = \frac{1}{4\sin\pi\alpha\sin\pi\beta}\int_C (a-z)^\alpha (z-b)^\beta dz$$

$$C:(a-, b-, a+, b+) \tag{5.13}$$

となる．この右辺は，α, β が非整数であるかぎり，α, β の解析関数であることは明らかである．その具体的な関数形を求めるにはどうすればよいか？

$\mathrm{Re}\,\alpha>-1$, $\mathrm{Re}\,\beta>-1$ のばあいには，(5.13) の左辺は実はふつうの定積分として計算され，すでに (5.2) の結果が得られている．すなわち

$$\mathrm{pf}\int_a^b (x-a)^\alpha(b-x)^\beta dx = (b-a)^{\alpha+\beta+1}B(\alpha+1, \beta+1) \qquad (5.14)$$

が成り立つのである．ところが，この右辺は α, β が負の整数でないかぎり，α, β の解析関数である．したがって解析接続の定理により，(5.13) の右辺は，α, β が非整数という条件のもとに，(5.14) の右辺に一致しなければならない．したがって，(5.14) は $\mathrm{Re}\,\alpha \leqq -1$, $\mathrm{Re}\,\beta \leqq -1$ のばあいにも，α, β が非整数でありさえすれば，成り立つのである．

注意 (i) (5.14) は α, β が非整数であるという仮定のもとに得られた結果である．すなわち，母関数の表式 (5.11) を基礎として議論が進められているからである．しかし，結果的には，α, β が 0 または正の整数のばあいにも，(5.14) は成り立つのである．それは (5.2) が $\mathrm{Re}\,\alpha > -1$, $\mathrm{Re}\,\beta > -1$ のばあいに成り立つことから明らかであろう．α, β が負の整数のばあいには，(5.11) の代りに，$F_1(z)$, $F_2(z)$ として α, β の整数値に対する母関数を用いなければならない ((4.8.2) 式を見よ)．あるいは定理 4.14 を使えばよい．(興味をもたれる読者には演習問題としておすすめする.)

注意 (ii) (5.13) 式につづく議論はつぎのように展開することもできる．(5.13) の右辺を $F(\alpha, \beta)$ とおくと，これは α, β について解析関数である．この 1 周積分を，まず $\mathrm{Re}\,\alpha > -1$, $\mathrm{Re}\,\beta > -1$ のばあいについて計算する．それには，積分路 C を (ひっぱったゴム紐のように考えて) 連続的に縮めていくと，特異点 $z=a$, $z=b$ にひっかかり，直線分 (a, b) を 2 往復する積分路になる．これを I → II → IV → III のように分解すると図 9 のようになる．

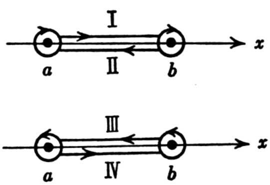


図 9

特異点 $z=a, z=b$ のまわりの小円についての積分は，小円の半径を 0 にすることによって省略される．容易に確かめられるように，被積分関数の中に現われる $a-z, z-b$ は，積分路 I, II … に沿って

$$\begin{array}{lll} \text{I}: & |x-a|e^{-\pi i} & |x-b|e^{\pi i} \\ \text{II}: & |x-a|e^{-\pi i} & |x-b|e^{-\pi i} \\ \text{IV}: & |x-a|e^{\pi i} & |x-b|e^{-\pi i} \\ \text{III}: & |x-a|e^{\pi i} & |x-b|e^{\pi i} \end{array}$$

となる．したがって

$$\int_{\text{I}} = e^{-\alpha\pi i}\cdot e^{\beta\pi i}\int_a^b (x-a)^\alpha(b-x)^\beta dx,$$

$$\int_{\text{II}} = e^{-\alpha\pi i}\cdot e^{-\beta\pi i}\int_b^a (x-a)^\alpha(b-x)^\beta dx,$$

$$\int_{\text{IV}} = e^{\alpha\pi i}\cdot e^{-\beta\pi i}\int_a^b (x-a)^\alpha(b-x)^\beta dx,$$

$$\int_{\text{III}} = e^{\alpha\pi i}\cdot e^{\beta\pi i}\int_b^a (x-a)^\alpha(b-x)^\beta dx.$$

したがって

$$\int_C = \int_{\mathrm{I}} + \int_{\mathrm{II}} + \int_{\mathrm{IV}} + \int_{\mathrm{III}}$$
$$= \{e^{-(\alpha-\beta)\pi i} - e^{-(\alpha+\beta)\pi i} + e^{(\alpha-\beta)\pi i} - e^{(\alpha+\beta)\pi i}\} I$$
$$= 4 \sin \pi\alpha \sin \pi\beta \cdot I.$$

ただし，$I = \int_a^b (x-a)^\alpha (b-x)^\beta dx$ である．それゆえ

$$F(\alpha, \beta) = \int_a^b (x-a)^\alpha (b-x)^\beta dx = (b-a)^{\alpha+\beta+1} B(\alpha+1, \beta+1). \tag{5.15}$$

ただし，(5.2) を使う．(5.15) を (5.13) の右辺に代入すれば (5.14) が得られる．以下，本文のように議論が続く．

ここで注意すべきことは，以上の議論では $F(\alpha, \beta)$ が (5.13) の右辺の複素積分であることを使うだけで，左辺すなわち有限部分積分に等しいという事実はなんら使っていないことである．(そのために議論が長くなった！) いま，とくに $a=0$, $b=1$, $\alpha+1 \to \alpha$, $\beta+1 \to \beta$ とおきかえると，(5.15) は

$$B(\alpha, \beta) = \frac{1}{4 \sin \pi\alpha \sin \pi\beta} \int_C (-z)^{\alpha-1} (z-1)^{\beta-1} dz \tag{5.16}$$
$$\mathrm{C} : (0-, 1-, 0+, 1+)$$

を与える．前述のように，α, β が非整数であるかぎり，右辺は α, β の解析関数である．したがって (5.16) は任意の非整数の α, β に対するベータ関数の定義式と考えることができるのである．

例 7　$\varphi(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で正則な解析関数とする．このとき，任意の複素数 α, β ($\neq$ 整数) に対して

$$\mathrm{pf}\int_a^b \varphi(x)(x-a)^\alpha (b-x)^\beta dx = \frac{1}{4 \sin \pi\alpha \sin \pi\beta} \int_C \varphi(t)(a-t)^\alpha (t-b)^\beta dt. \tag{5.17}$$

ただし，積分路 C は $(a-, b-, a+, b+)$ とする．

例 8　超関数 $(x-a)^\alpha (b-x)^\beta H(x; a, b)$ の母関数は

$$\frac{1}{4j \sin \pi\alpha \sin \pi\beta} \int_C \frac{(a-t)^\alpha (t-b)^\beta}{t-z} dt \tag{5.18}$$

である．ただし，α, β は任意の複素数 ($\neq$ 整数) で，積分路 C は $(a-, b-, a+, b+)$ とする．

例 7 の結果を導くためには，本文の $f_1(x) = |x-a|^\alpha H(x-a)$ の代りに $\varphi(x) f_1(x)$ を使えばよい．とくに $\varphi(x)$ として $1/\{j(x-z)\}$ をとれば例 8 の結果が得られる．

§6.　上(下)型超関数どうしの積

特異点を共有しない 2 つの超関数の積を合理的に定義することができたので，たとえば (11.1.1) で与えたふつうの関数 $f(x) = (x-a)^\alpha (b-x)^\beta H(x; a, b)$ を

(5.6), (5.7) で与えられる既知の超関数の積としてただちに超関数と見直すことができるようになった. 特異点を共有するばあいは積は不可能であろうか？ 1 価解析関数どうしの積なら可能であることはすでにわれわれは知っている. しかし, これではあまりに制限が強すぎる. 実は, すぐ下に示すように, 上(下)型超関数のばあいは簡単に積が定義されるのである.

〔**定義 3**〕 同じ区間で定義された 2 つの上(下)型超関数 $[\varphi_1(x)]_\pm$, $[\varphi_2(x)]_\pm$ の積を

$$[\varphi_1(x)]_\pm\cdot[\varphi_2(x)]_\pm \overset{\text{def}}{=} [\varphi_1(x)\varphi_2(x)]_\pm \tag{6.1}$$

で定義する (複号同順).

(合理性) 上(下)型超関数の定義により, $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$ は x 軸の上(下)側の領域で正則な解析関数である. したがって $\varphi_1(z)\varphi_2(z)$ もそこで正則であるから

$$[\varphi_1(x)\varphi_2(x)]_\pm = \text{H.F.}\{\varphi_1(z)\varphi_2(z)\mathbf{1}_\pm(z)\} \tag{6.2}$$

はたしかに上(下)型の超関数として存在する. (6.2) を (6.1) に代入すると, (6.1) の左辺の超関数は 2 つの解析関数 $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$ の積の性格を忠実に反映することがわかる. すなわち, 積に関する交換法則, 配分法則, 結合法則のほか, 積の微分の計算に関する規則なども, すべてふつうの関数の積と同様である. さらに, O.F. の定義により

$$\begin{aligned}\text{O.F.}[\varphi_1(x)\varphi_2(x)]_\pm &= \lim_{\varepsilon\to 0}\{\varphi_1(x\pm i\varepsilon)\varphi_2(x\pm i\varepsilon)\}\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\varphi_1(x\pm i\varepsilon)\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi_2(x\pm i\varepsilon)\\ &= \text{O.F.}[\varphi_1(x)]_\pm\cdot\text{O.F.}[\varphi_2(x)]_\pm\end{aligned}$$

であるから, (6.1) の定義は合理的である. ∎

注意 上(下)型超関数どうしの積は合理的に定義されるが, 上型超関数と下型超関数の積については上の定義はまったく触れていないことに注意してほしい. 定理 7.2 によれば, 任意の超関数 $f(x)=\text{H.F.}\,F(z)$ は $f(x)=[F(x)]_+-[F(x)]_-$ のように上型と下型の超関数に分解することができる. (さらに, 定理 7.3 によれば, 上超関数と下超関数に分解することもできるのである.) そこで, 2 つの超関数について, かりに

$$\begin{aligned}&\{[F_1(x)]_+-[F_1(x)]_-\}\cdot\{[F_2(x)]_+-[F_2(x)]_-\}\\ &=\{[F_1(x)]_+\cdot[F_2(x)]_++[F_1(x)]_-\cdot[F_2(x)]_-\}\\ &\quad-\{[F_1(x)]_+\cdot[F_2(x)]_-+[F_1(x)]_-\cdot[F_2(x)]_+\}\end{aligned}$$

の等式が成り立つものと考えてみると, 右辺の第 1 の $\{\cdots\}$ は意味をもつのに対して, 第 2 の $\{\cdots\}$ は超関数として無意味であることがわかる. (もしそれが意味をもてば, 左辺,

つまり任意の超関数の積，が意味をもつことになろう！）たとえば，(7.2.7)により

$$\left[\frac{1}{x}\right]_\pm=\frac{1}{x}\mp\pi i\delta(x).$$

$$\therefore\quad \left\{\left[\frac{1}{x}\right]_\pm\right\}^2=\left[\frac{1}{x^2}\right]_\pm=\left[-\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)\right]_\pm=-\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\right]_\pm.$$

したがって

$$\left\{\frac{1}{x}\mp\pi i\delta(x)\right\}^2=\frac{1}{x^2}\pm\pi i\delta'(x) \tag{6.3}$$

の等式は成り立つけれども，左辺を展開して両辺から $1/x^2$ を消去するような計算は許されない．

§7. 上(下)型超関数の関数

定義から明らかなように，上(下)型超関数どうしの積はまた上(下)型超関数であるから，$\{[\varphi(x)]_\pm\}^2$, $\{[\varphi(x)]_\pm\}^3, \cdots$ が考えられ，これらは上(下)型超関数である．この事実は容易につぎのように一般化される．

[定理 7]　$[\varphi(x)]_\pm$ を上(下)型の超関数，$F(z)$ を整関数とする．このとき

$$[F\{\varphi(x)\}]_\pm=F\{[\varphi(x)]_\pm\} \tag{7.1}$$

が成り立つ．ただし，右辺は $F(z)$ のベキ級数展開で $z=[\varphi(x)]_\pm$ とおいたものを意味する．

（証明）$F(z)$ は整関数であるから

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n \tag{7.2}$$

は z の任意の値に対して絶対かつ広義一様に収束する．さて，上(下)型超関数の定義により，$\varphi(z)$ は $0\leqq \mathrm{Im}\,z\leqq A_\pm$ で正則である．したがって $F\{\varphi(z)\}$ も同じ z の領域で正則で，つぎのように上(下)型の超関数をつくる．

$$\begin{aligned}[F\{\varphi(x)\}]_\pm&=\text{H.F.}[F\{\varphi(z)\}\mathbf{1}_\pm(z)]\\&=\text{H.F.}\left[\sum_{n=0}^{\infty}c_n\{\varphi(z)\}^n\mathbf{1}_\pm(z)\right]\\&=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\text{H.F.}[\{\varphi(z)\}^n\mathbf{1}_\pm(z)].\end{aligned} \tag{7.3}$$

ただし，最後の表式は，超関数の無限級数に関する定義4.1の(4.2.3)式を用いて得られる．さて

$$\text{H.F.}[\{\varphi(z)\}^n\mathbf{1}_\pm(z)]=[\{\varphi(x)\}^n]_\pm=\{[\varphi(x)]_\pm\}^n \tag{7.4}$$

である．(7.4)を(7.3)に代入して，(7.2)を想い起こすと，けっきょく(7.1)の関係が得られる．∎

一般に，任意の超関数は線形結合と微分とは自由に行なうことができる．しかし，超関数どうしの積をつくることや，超関数の関数をつくることは許されないのである．ところが，定義3と定理7によれば，上(下)型超関数についてはこれらの演算がふつうの関数と同様に実行できることになる．これは大きい福音というべきであろう．

例 9　つぎの結果を導け．

$$[H(x)]_\pm = \pm\frac{1}{2}H(x)-\frac{1}{j}\log|x|, \tag{7.5}$$

$$[\{H(x)\}^2]_\pm = \frac{1}{4}H(x)\mp\frac{1}{j}\log|x|H(x)+\frac{1}{j^2}\{\log|x|\}^2, \tag{7.6}$$

$$\left[\frac{1}{x}H(x)\right]_\pm = \pm\frac{1}{2x}H(x)-\frac{1}{j}\frac{1}{x}\log|x|-\frac{j}{8}\delta(x). \tag{7.7}$$

(7.5)はすでに(7.2.10)として与えられている．(7.6)を求めるには，定義3により

$$[\{H(x)\}^2]_\pm = \{[H(x)]_\pm\}^2$$

を計算すればよい．さて，$x \neq 0$に対しては

$$\begin{aligned}\text{O.F.}\{[H(x)]_\pm\}^2 &= \{\text{O.F.}[H(x)]_\pm\}^2\\ &= \frac{1}{4}H(x)\mp\frac{2}{j}\log|x|H(x)+\frac{1}{j^2}\{\log|x|\}^2\end{aligned}$$

である．ところがこの最後の表式は超関数としても意味がある．したがって，定理11.11により，これと超関数 $[\{H(x)\}^2]_\pm$ とは**一般 δ 関数**を除けば一致する．すなわち(7.6)の等式が一般δ関数を除けば成立する．ところが(7.6)の各項は明らかに一般δ関数を含まないから，(7.6)がそのまま成り立つのである．

つぎに，(7.6)の両辺をxについて微分し，

$$\frac{d}{dx}[\{H(x)\}^2]_\pm = \left[\frac{d}{dx}\{H(x)\}^2\right]_\pm = [2H(x)\delta(x)]_\pm = -\frac{2}{j}\left[\frac{1}{x}H(x)\right]_\pm$$

に注意すれば，(7.7)が得られる．ただし，上の変形で

$$\frac{d}{dz}H(z) = \delta(z) = -\frac{1}{j}\frac{1}{z}$$

の関係を使うことはいうまでもなかろう．

上の例からわかるように，上(下)型の超関数の計算はふつうの関数のばあいとまったく同様に行ない，最終段階で付加項として一般δ関数を考慮すればよいのである．途中の段階では

$$\{H(\pm x)\}^n = H(\pm x),\ \ H(x)H(-x) = 0$$

などの（超関数としては許されない）関係をどしどし使ってもよい．▌

例 10　例9の結果からつぎの結果を確かめよ．

$$\text{G.F.}\log|x| = -jH(z)\mathbf{1}(z) \cong -\frac{j}{2}\operatorname{sgn} z\,\mathbf{1}(z), \tag{7.8}$$

$$\text{G.F.}\log|x|H(x) = -\frac{j}{2}\{H(z)\}^2. \tag{7.9}$$

(7.5) から

$$\begin{aligned}\log|x| &= -\frac{j}{2}\{[H(x)]_+ + [H(x)]_-\}\\ &= -\frac{j}{2}[\text{H.F.}\{H(z)\mathbf{1}_+(z)\} + \text{H.F.}\{H(z)\mathbf{1}_-(z)\}]\\ &= -\frac{j}{2}\text{H.F.}[H(z)\{\mathbf{1}_+(z)+\mathbf{1}_-(z)\}]\\ &= -j\,\text{H.F.}\{H(z)\mathbf{1}(z)\}.\end{aligned} \tag{7.10}$$

ただし，$\mathbf{1}_\pm(z)=\mathbf{1}(z)\pm 1/2$ を使う．つぎに，

$$\mathbf{1}(z) = H(z)-H(-z), \quad \operatorname{sgn} z = H(z)+H(-z)$$

であるから，

$$H(z) = \frac{1}{2}\{\operatorname{sgn} z+\mathbf{1}(z)\}.$$

したがって

$$\begin{aligned}H(z)\mathbf{1}(z) &= \frac{1}{2}\{\operatorname{sgn} z+\mathbf{1}(z)\}\mathbf{1}(z)\\ &= \frac{1}{2}\operatorname{sgn} z\,\mathbf{1}(z)+\frac{1}{2}\{\mathbf{1}(z)\}^2\\ &\cong \frac{1}{2}\operatorname{sgn} z\,\mathbf{1}(z). \qquad \because \quad \{\mathbf{1}(z)\}^2 = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

これを (7.10) に代入すると (7.8) が得られる．

つぎに，(7.6) から

$$\begin{aligned}\log|x|H(x) &= -\frac{j}{2}([\{H(x)\}^2]_+ - [\{H(x)\}^2]_-)\\ &= -\frac{j}{2}\text{H.F.}[\{H(z)\}^2\mathbf{1}_+(z) - \{H(z)\}^2\mathbf{1}_-(z)]\\ &= -\frac{j}{2}\text{H.F.}\{H(z)\}^2 \qquad \because \quad \mathbf{1}_+(z)-\mathbf{1}_-(z) = \mathbf{1}\end{aligned}$$

が得られる．これは (7.9) にほかならない．

さて，$F(z)$ が整関数でない一般のばあいにも，$[\varphi(x)]_\pm$ の関数 $F\{[\varphi(x)]_\pm\}$ は考えられないだろうか？　実は，つぎのようにすれば，上(下)型の超関数の関数は合理的に定義できるのである．

〔定義 4〕　$\varphi(z), F(z)$ は，$0\leqq \text{Im}\, z \leqq \pm\varepsilon$（$\varepsilon$ は適当な正数）に対して $\varphi(z)$, $F\{\varphi(z)\}$ が正則であるような解析関数とする．このとき

$$F\{[\varphi(x)]_\pm\} \overset{\text{def}}{=} [F\{\varphi(x)\}]_\pm \tag{7.11}$$

によって，上(下)型超関数 $[\varphi(x)]_\pm$ の関数 $F\{[\varphi(x)]_\pm\}$ を定義する．

(合理性) 仮定により，$0 \leqq \operatorname{Im} z \leqq \pm\varepsilon$ (ε は適当な正数) に対して $\varphi(z)$, $F\{\varphi(z)\}$ は正則であるから，

$$[\varphi(x)]_\pm = \text{H.F.}\{\varphi(z)\mathbf{1}_\pm(z)\}, \tag{7.12}$$

$$[F\{\varphi(x)\}]_\pm = \text{H.F.}[F\{\varphi(z)\}\mathbf{1}_\pm(z)] \tag{7.13}$$

で定義される上(下)型超関数が存在する．したがって，(7.11) の右辺は確かに存在する．しかも，(7.13) により，$[\varphi(x)]_\pm \to F\{[\varphi(x)]_\pm\}$ の関数関係は $\varphi(z) \to F\{\varphi(z)\}$ の関数関係とまったく同じである．▮

[定理 8] $\varphi(z)$, $F(z)$ は，$\varphi(z)$, $F\{\varphi(z)\}$ が x 軸上ではたかだか弧立特異点しかもたないような解析関数とする．このとき $F\{[\varphi(x)]_\pm\}$ が存在する．

(証明) $\varphi(z)$, $F\{\varphi(z)\}$ の特異点で x 軸上にあるものは，仮定により弧立特異点である．したがって，それ以外に特異点があるとすれば，そのうちもっとも x 軸に近いものが存在する．それを $z_0 = x_0 + iy_0$ とすれば，$0 < \varepsilon < |y_0|$ のように ε を選べば，定義 4 の前提条件が満足される．▮

例 11

(i) $\varphi(z) = \operatorname{cosech}\left(\dfrac{1}{z}\right)$, $F(z) = z$;

(ii) $\varphi(z) = \sinh\left(\dfrac{1}{z}\right)$, $F(z) = \dfrac{1}{z}$;

(iii) $\varphi(z) = e^{1/z}$, $F(z) = \dfrac{2z}{z^2-1}$.

これらはどれも

$$F\{\varphi(z)\} = \operatorname{cosech}\frac{1}{z} = \frac{2e^{1/z}}{e^{2/z}-1}$$

を与える．この関数の特異点は

$$z = 0,\ z_N \equiv -i(N\pi)^{-1} \quad (N = \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

である．$N \to \pm\infty$ のとき $z_N \to 0$ であるから，$z=0$ は弧立特異点では**ない**．したがって定理 8 の前提条件は満足されない．実際，$F\{[\varphi(x)]_\pm\}$ は存在しないのである．もっとも，(ii), (iii) については $[\varphi(x)]_\pm$ 自身は存在する．

例 12 上の例の (i), (ii), (iii) で $\varphi(z)$ をそれぞれ $\operatorname{cosec}(1/z)$, $\sin(1/z)$, $e^{i/z}$ とすると，$F\{\varphi(z)\} = \operatorname{cosec}(1/z)$ となり，特異点は

$$z = 0,\ z_N \equiv (N\pi)^{-1} \quad (N = \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

となる．これらはすべて x 軸上にあり，とくに $z=0$ は弧立特異点では**ない**．しかし $F\{\varphi(z)\}$, $\varphi(z)$ は x 軸上を除けばいたるところ正則であるから，定義 4 が適用されて

$F\{[\varphi(x)]_\pm\}$ が存在する．すなわち，定理 8 は $F\{[\varphi(x)]_\pm\}$ が存在するための十分条件を与えるのであって，必要条件についてはなにも言わないのである．

例 13 $\varphi(z)$, $F(z)$ が有理型関数であれば，$\varphi(z)$, $F\{\varphi(z)\}$ の特異点はすべて極であるから，定理 4 が適用される．たとえば

$$\frac{1}{[1/x]_\pm}=\left[\frac{1}{1/x}\right]_\pm=[x]_\pm=x$$

のような演算ができる．これは定理 7 が使えないばあいである．

定義 4 によれば，$F(z)=1/z$ という特別なばあい，$\{[\varphi(x)]_\pm\}^{-1}$ は超関数として意味をもつことになる．これを使えば，上(下)型超関数の割り算が

$$[\varphi_1(x)]_\pm\div[\varphi_2(x)]_\pm\overset{\text{def}}{=}[\varphi_1(x)]_\pm\cdot\{[\varphi_2(x)]_\pm\}^{-1} \tag{7.14}$$

によって定義される．こうして，上(下)型超関数のあいだで四則演算が自由に行なえることになる．しかも，その解析関数も考えられる．つまり，実際上，ふつうの関数と同じように計算できるのである．

最後に，“上(下)型超関数の関数”という観点からベキ型超関数の Fourier 変換の公式を検討してみよう．

$$\mathcal{F}|x|^\alpha=2\cos\frac{\pi}{2}(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)|2\pi\xi|^{-(\alpha+1)}, \tag{7.15}$$

$$\mathcal{F}|x|^\alpha H(x)=\Gamma(\alpha+1)|2\pi\xi|^{-(\alpha+1)}\exp\left[-\frac{\pi}{2}(\alpha+1)i\operatorname{sgn}\xi\right] \tag{7.16}$$

を比べてみると，(7.15) の右辺が既知の超関数であるのに対して，(7.16) の右辺は本来このような超関数は定義されていない．しかし，(7.4.8) によれば，(7.16) は

$$\mathcal{F}|x|^\alpha H(x)=\Gamma(\alpha+1)[(j\xi)^{-(\alpha+1)}]_- \tag{7.17}$$

のように表わすことができる．これは下超関数として確かに意味がある．さて

$$\begin{aligned}[(j\xi)^{-(\alpha+1)}]_-&=[\exp\{-(\alpha+1)\operatorname{Log}(j\xi)\}]_-\\&=\exp\{-(\alpha+1)[\operatorname{Log}(j\xi)]_-\}.\end{aligned}$$

ところが

$$\begin{aligned}[\operatorname{Log}(j\xi)]_-&=\log 2\pi+\frac{\pi}{2}i+[\operatorname{Log}\xi]_-\\&=\log 2\pi+\frac{\pi}{2}i+\log|\xi|-\pi iH(-\xi)\qquad\because\ (7.2.8)\\&=\log|2\pi\xi|+\frac{\pi}{2}i\operatorname{sgn}\xi.\end{aligned} \tag{7.18}$$

したがって，(7.17) は

$$\mathcal{F}|x|^{\alpha}H(x)=\Gamma(\alpha+1)\exp\left[-(\alpha+1)\left\{\log|2\pi\xi|+\frac{\pi}{2}i\operatorname{sgn}\xi\right\}\right] \quad (7.19)$$

と書ける．右辺の $\{\cdots\}$ は (7.18) により下超関数であるから，それの指数関数として右辺はたしかに意味があるのである．

なお，$\mathcal{F}|x|^{\alpha}(\log|x|)^{n}$，$\mathcal{F}|x|^{\alpha}(\log|x|)^{n}H(x)$ の公式に現われる超関数

$$k_1(\xi,\alpha)=\psi(\alpha)-\frac{\pi}{2}\tan\frac{\pi}{2}\alpha-\log|2\pi\xi|, \quad (7.20)$$

$$k(\xi,\alpha)=\psi(\alpha)-\log|2\pi\xi|-\frac{\pi}{2}i\operatorname{sgn}\xi \quad (7.21)$$

のうち $k(\xi,\alpha)$ が下超関数であることは (7.18) から明らかであろう． Fourier 変換の表で，$\mathcal{F}|x|^{\alpha}(\log|x|)^{n}H(x)$ の公式は下超関数 $k(\xi,\alpha)$ の関数としてそのまま意味があるのに対して，$\mathcal{F}|x|^{\alpha}(\log|x|)^{n}$ の公式は形式的に $k_1(\xi,\alpha)$（したがって $\log|\xi|$）の関数と書けるというだけであって，$|\xi|^{-(\alpha+1)}(\log|\xi|)^{p}$ という形の超関数の線形結合としてはじめて意味をもつのである．

§8.　超関数の積の種類

超関数どうしの積についてこれまでに得られたことをまとめておこう．

（ i ）　1価解析関数を見直した超関数：$\psi_1(x)\cdot\psi_2(x)$,

（ ii ）　特異点を共有しない超関数：$f_1(x)\cdot f_2(x)$,

（ iii ）　上(下)型超関数：$[\varphi_1(x)]_{\pm}\cdot[\varphi_2(x)]_{\pm}$

の3つのばあいには合理的に積が定義できる．このほか，積に類似するものとして

（ f ）　　形式積：$\psi(x)\circ f(x)$

がある．たとえば，$x^{-1}\cdot\tan x$ は（ i ）のばあい，$|x|^{1/2}\cdot|x-1|^{1/3}$ は（ ii ）のばあい，$\{1/x+\pi i\delta(x)\}^2$ は（ iii ）のばあいに相当する． 積と形式積とが異なるものであることは，たとえば

$$\frac{1}{x-a}\cdot\delta(x)=-\frac{1}{a}\delta(x),$$

$$\frac{1}{x-a}\circ\delta(x)=\frac{1}{a}\{\delta(x-a)-\delta(x)\}$$

$(a\neq 0)$ を比較すれば明らかである． また，この2つの式で $a=0$ としたものを考えると，$x^{-1}\cdot\delta(x)$ は存在しないのに対して，$x^{-1}\circ\delta(x)=-\delta'(x)$ が成り立つのである．

なお，ベキ型超関数 $|x|^{\alpha}(\log|x|)^{n}H(x)$ は $|x|^{\alpha}, \log|x|$（n 個），$H(x)$ の

積の形をしているが，もちろん積ではない．ひとかたまりで1つの超関数を表わすのである．積，形式積，積の形で定義された超関数といろいろあるが，ふつうの関数にひきもどしたときには，すべて積になることをつけ加えておこう．

§9. ま と め

超関数でも積が定義されることを知った．まず，共通の特異点をもたないような2つの超関数 $f_1(x)$, $f_2(x)$ の積 $f_1(x)\cdot f_2(x)$ を定義した．その際，射影と解析接続の概念が基本的な役割を演ずる．定積分 $\int_a^b f_1(x)\cdot f_2(x)dx$ を，母関数 $F_1(z)$, $F_2(z)$ を使って，$\int_C F_1(z)F_2(z)dz$ の形に表わすことができた．その1つの例として $\mathrm{pf}\int_a^b (x-a)^\alpha(b-x)^\beta dx$ を計算した．

つぎに，上(下)型超関数どうしの積をごく自然な形で定義した．しかも，このばあいには，積ばかりでなく，‘超関数の関数’を定義することができた．つまり，上(下)型超関数はふつうの関数とまったく同じ方式で計算することができるのである．最後に，超関数の世界で積の形で現われるものについて概括的な注意を与えた．

13 超関数のたたみこみ

§1. はじめに

いま，2つの**ふつうの関数** $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ を考える．それらの Fourier 変換

$$\phi_1(\xi) = \mathcal{F}\varphi_1(x),\ \ \phi_2(\xi) = \mathcal{F}\varphi_2(x) \tag{1.1}$$

が存在するものと仮定しよう．$\varphi_1(x)$ と $\varphi_2(x)$ の積 $\varphi_1(x)\varphi_2(x)$ の Fourier 変換は

$$\mathcal{F}\{\varphi_1(x)\varphi_2(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x)\varphi_2(x)e^{-j\xi x}dx \tag{1.2}$$

である．さて，$\varphi_1(x)$ は $\phi_1(\xi)$ の Fourier 逆変換であるから

$$\varphi_1(x) = \mathcal{F}^{-1}\phi_1(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(t)e^{jxt}dt. \tag{1.3}$$

これを (1.2) の右辺に代入すると

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(x)dx\int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(t)e^{-j(\xi-t)x}dt \\
&\quad = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(t)dt\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(x)e^{-j(\xi-t)x}dx \\
&\quad = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(t)\phi_2(\xi-t)dt
\end{aligned}$$

のように変形される．ただし，積分順序の交換が可能であるとし，また，

$$\phi_2(\xi) = \mathcal{F}\varphi_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(x)e^{-j\xi x}dx$$

の関係が使ってある．けっきょく，(1.2) は

$$\mathcal{F}\{\varphi_1(x)\varphi_2(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(t)\phi_2(\xi-t)dt \tag{1.4}$$

となる．

(1.4) の右辺の定積分は ξ の関数であって，2つの関数 $\phi_1(\xi)$, $\phi_2(\xi)$ の**たたみこみ**とよばれるものである．そして，これを表わすのに，ふつう

$$\phi_1(\xi)*\phi_2(\xi) \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(t)\phi_2(\xi-t)dt \tag{1.5}$$

のような記号が使われている．積分変数 t を $\xi-t$ に変えると，定義式 (1.5) か

らただちに**交換法則**:

$$\psi_1(\xi)*\psi_2(\xi)=\psi_2(\xi)*\psi_1(\xi) \tag{1.6}$$

が得られる．また，(1.4) は

$$\mathcal{F}\{\varphi_1(x)\varphi_2(x)\}=\mathcal{F}\varphi_1(x)*\mathcal{F}\varphi_2(x) \tag{1.7}$$

という美しい形に表わされる．つまり，積の Fourier 変換は Fourier 変換のたたみこみに等しい．このような性質をもつ‘たたみこみ’を超関数のばあいに一般化しようというのが本章の目的である．

§2. たたみこみ——ふつうの関数と超関数

まず，ふつうの関数 $\varphi(x)$ と超関数 $f(x)$ の積について Fourier 変換を考えよう．$\varphi(x)f(x)$ が超関数として定義されるためには $\varphi(x)$ が解析関数でなければならないことに注意する．さて

$$\psi(\xi)=\mathcal{F}\varphi(x),\quad g(\xi)=\mathcal{F}f(x) \tag{2.1}$$

としよう．$\psi(\xi)$ はふつうの関数であるが，必ずしも解析関数であるとはかぎらない．$g(\xi)$ は超関数であって，

$$g(\xi)=\text{H.F. }G(\zeta), \tag{2.2}$$

$$G(\zeta)=\left[\int_{-\infty}^{c},\int_{\infty}^{c}\right]f(x)e^{-j\zeta x}dx \tag{2.3}$$

のように与えられる．

いま，超関数 $\varphi(x)f(x)$ の Fourier 変換を $h(\xi)=\text{H.F. }H(\zeta)$ とすると，(2.3) と同様

$$H(\zeta)=\left[\int_{-\infty}^{c},\int_{\infty}^{c}\right]\varphi(x)f(x)e^{-j\zeta x}dx \tag{2.4}$$

である．(2.1) の第1式から

$$\varphi(x)=\mathcal{F}^{-1}\psi(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)e^{jxt}dt$$

であるから，これを (2.4) の右辺に代入すると，

$$\begin{aligned}H(\zeta)&=\left[\int_{-\infty}^{c},\int_{\infty}^{c}\right]f(x)dx\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)e^{-j(\zeta-t)x}dt\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)dt\left[\int_{-\infty}^{c},\int_{\infty}^{c}\right]f(x)e^{-j(\zeta-t)x}dx\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)G(\zeta-t)dt\end{aligned} \tag{2.5}$$

が得られる．ただし，積分の順序を変更し，さらに (2.3) が使ってある．(2.5) の右辺がたたみこみの形をしていることに注意してほしい．もっとも，いまの

ばあいは，ふつうの実変数の関数 $\psi(\xi)$ と複素変数の関数 $G(\zeta)$ のたたみこみである．$G(\zeta)=\mathrm{G.F.}\,g(\xi)=\mathrm{G.F.}\mathfrak{F}f(x)$ であるから，(2.5) はけっきょく

$$\mathrm{G.F.}\,\mathfrak{F}\{\varphi(x)f(x)\}=\mathfrak{F}\varphi(x)*\mathrm{G.F.}\,\mathfrak{F}f(x) \tag{2.6}$$

という形にまとめられる．したがって，両辺の H.F. をとると

$$\mathfrak{F}\{\varphi(x)f(x)\}=\mathrm{H.F.}\{\mathfrak{F}\varphi(x)*\mathrm{G.F.}\,\mathfrak{F}f(x)\} \tag{2.7}$$

が得られる．

§3. たたみこみ——超関数と超関数

いま，超関数 $f_1(x), f_2(x)$ は共通の特異点をもたないと仮定する．このばあい，積 $f_1(x)\cdot f_2(x)$ が超関数として定義される．その Fourier 変換を考えよう．

$$g_1(\xi)=\mathfrak{F}f_1(x),\quad g_2(\xi)=\mathfrak{F}f_2(x), \tag{3.1}$$

$$h(\xi)=\mathfrak{F}\{f_1(x)\cdot f_2(x)\} \tag{3.2}$$

とし，$h(\xi)=\mathrm{H.F.}\,H(\zeta)$，すなわち $H(\zeta)=\mathrm{G.F.}\,h(\xi)$ とすると

$$H(\zeta)=\left[\int_{-\infty}^{c},\int_{\infty}^{c}\right]f_1(x)\cdot f_2(x)e^{-j\zeta x}dx \tag{3.3}$$

である．さて，一般に，$g(\xi)=\mathfrak{F}f(x)$ したがって $f(x)=\mathfrak{F}^{-1}g(\xi)$ とすると

$$\mathrm{G.F.}\,\mathfrak{F}f(x)=\left[\int_{-\infty}^{c},\int_{\infty}^{c}\right]f(x)e^{-j\zeta x}dx, \tag{3.4}$$

$$\mathrm{G.F.}\,\mathfrak{F}^{-1}g(\xi)=\left[\int_{\gamma}^{\infty},\int_{\gamma}^{-\infty}\right]g(\xi)e^{jz\xi}d\xi \tag{3.5}$$

が成り立つ．ただし，定数 c, γ は $f(x)$, $g(\xi)$ がそれぞれ $x=c$, $\xi=\gamma$ で積分可能でありさえすれば任意である（定理 5.10）．

まず，(3.3) の上成分 $H_+(\zeta)$ を考えよう．超関数どうしの積の定積分に関する定理 12.4 によれば

$$\begin{aligned}H_+(\zeta)&=\int_{-\infty}^{c}f_1(x)\cdot f_2(x)e^{-j\zeta x}dx\\&=\int_{\mathrm{C}}F_1(z)F_2(z)e^{-j\zeta z}dz.\end{aligned} \tag{3.6}$$

ただし積分路Cは図1に示すような4本の半無限曲線 I, II, …から成る．図の

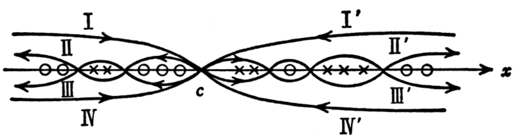


図 1

○, ×はそれぞれ $F_1(z)$, $F_2(z)$ の特異点を示す．分点 $x=c$ は，もちろん○, ×に一致しないように選んである．被積分関数の $F_1(z)F_2(z)$ は，Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳに沿ってそれぞれ $F_{1+}(z)F_{2+}(z)$, $F_{1+}(z)F_{2-}(z)$, $F_{1-}(z)F_{2+}(z)$, $F_{1-}(z)F_{2-}(z)$ である．

さて，(3.5) によれば

$$F_1(z) = \left[\int_\gamma^\infty, \int_\gamma^{-\infty}\right] g_1(t)e^{jzt}dt. \tag{3.7}$$

ただし，便宜上，積分変数として ξ の代りに t が使ってある．(3.7) を (3.6) に代入すると

$$\begin{aligned} H_+(\zeta) &= \int_{\mathrm{I}+\mathrm{II}}\int_\gamma^\infty g_1(t)F_2(z)e^{-j(\zeta-t)z}dzdt \\ &\quad +\int_{\mathrm{III}+\mathrm{IV}}\int_\gamma^{-\infty} g_1(t)F_2(z)e^{-j(\zeta-t)z}dzdt \\ &= \int_\gamma^\infty g_1(t)dt\int_{\mathrm{I}+\mathrm{II}}F_2(z)e^{-j(\zeta-t)z}dz \\ &\quad +\int_\gamma^{-\infty} g_1(t)dt\int_{\mathrm{III}+\mathrm{IV}}F_2(z)e^{-j(\zeta-t)z}dz. \end{aligned}$$

z についての積分を考えると，$F_2(z)$ の特異点は×であるから，積分路Ⅱはに，ⅢはⅠに変形できる．ただし，積分路をたどる向きは逆にしなければならない．したがって

$$\int_{\mathrm{I}+\mathrm{II}} = \int_{\mathrm{I}} - \int_{\mathrm{IV}} = \int_l$$

$$\int_{\mathrm{III}+\mathrm{IV}} = -\int_{\mathrm{I}} + \int_{\mathrm{IV}} = -\int_l$$

となる．ただし，積分路 l はⅠ－Ⅳ，すなわち $-\infty \to c \to -\infty$ のようにたどる（左側に開いた）U字型の曲線である．この積分路は Fourier 変換の母関数の上成分を求める際に使われるものである．すなわち，$f_2(x)=\mathrm{H.F.}\,F_2(z)$, $g_2(\xi)=\mathrm{H.F.}\,G_2(\zeta)$ とするとき

$$G_2(\zeta) = \left[\int_l, \int_\gamma\right] F_2(z)e^{-j\zeta z}dz \tag{3.8}$$

が成り立つのであった（定義5.1）．したがって

$$\begin{aligned} H_+(\zeta) &= \int_\gamma^\infty g_1(t)G_{2+}(\zeta-t)dt - \int_\gamma^{-\infty} g_1(t)G_{2+}(\zeta-t)dt \\ &= \int_{-\infty}^\infty g_1(t)G_{2+}(\zeta-t)dt \end{aligned}$$

となる．$H_-(\zeta)$ についてもまったく同様の方法で（図1の積分路Ⅰ′, Ⅱ′, … を使って）

$$H_-(\zeta)=\int_{-\infty}^{\infty}g_1(t)G_{2-}(\zeta-t)dt$$

が得られる．これら２つの等式は

$$H(\zeta)=\int_{-\infty}^{\infty}g_1(t)G_2(\zeta-t)dt \tag{3.9}$$

のようにまとめられる．

(3.9) の右辺はたたみこみの形をしている．つまり

$$H(\zeta)=g_1(\xi)*G_2(\zeta) \tag{3.10}$$

と書ける．(2.5) の右辺が $\phi(\xi)*G(\zeta)$ であったのと比較すると，形式的にはまったく同じであるが，$\phi(\xi)$ がふつうの関数であるのに対して，$g_1(\xi)$ が超関数であることにとくに注意しなければならない．

(3.10) は，また

$$\text{G.F.}\,\mathfrak{F}\{f_1(x)\cdot f_2(x)\}=\mathfrak{F}f_1(x)*\text{G.F.}\,\mathfrak{F}f_2(x), \tag{3.11}$$

$$\mathfrak{F}\{f_1(x)\cdot f_2(x)\}=\text{H.F.}\{\mathfrak{F}f_1(x)*\text{G.F.}\,\mathfrak{F}f_2(x)\} \tag{3.12}$$

のように表わすことができる．これらは，超関数と解析関数の積の Fourier 変換に関する (2.6), (2.7) の式と形式的にまったく同じである．

§4. たたみこみの定義

２つの関数の積の Fourier 変換を議論する際に**たたみこみ**という演算が重要な役割を演ずることはこれまでよく知られている事柄である．ところが，超関数のばあいにも，それと類似の演算が活用されることは上に見て来たとおりである．そこで，たたみこみの定義を明確な形で与えて，それの性質を調べることにしよう．

〔定義 1〕 $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ をふつうの関数，$f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ を超関数，$F(z)$, $F_1(z)$, $F_2(z)$ をそれらの母関数とする．このとき，(ｉ) ふつうの関数どうし，(ii) ふつうの関数と母関数，(iii) 超関数と母関数，(iv) ふつうの関数と超関数，(v) 超関数どうし，の**たたみこみ**をつぎのように定義する．

$$\varphi_1(x)*\varphi_2(x)\overset{\text{def}}{=}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(t)\,\varphi_2(x-t)dt, \tag{4.1}$$

$$\varphi(x)*F(z)\overset{\text{def}}{=}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)F(z-t)dt, \tag{4.2}$$

$$f_1(x)*F_2(z)\overset{\text{def}}{=}\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)F_2(z-t)dt, \tag{4.3}$$

$$\varphi(x)*f(x) \overset{\text{def}}{=} \text{H.F.}\{\varphi(x)*F(z)\}, \tag{4.4}$$

$$f_1(x)*f_2(x) \overset{\text{def}}{=} \text{H.F.}\{f_1(x)*F_2(z))\}. \tag{4.5}$$

（i）は実変数 x のふつうの関数，（ii）と（iii）は複素変数 z の解析関数で母関数の資格をもち，（iv）と（v）は x の超関数である．

注意 ふつうの関数と超関数，および超関数どうしのたたみこみを，ふつうの関数どうしのたたみこみと同じ形，すなわち

$$\varphi(x)*f(x) \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)f(x-t)dt, \tag{4.4'}$$

$$f_1(x)*f_2(x) \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(x-t)dt \tag{4.5'}$$

のように表わすこともできる．ただし，右辺の積分の意味は，たとえば (4.4′) については，パラメーター t を含む x の超関数 $\varphi(t)f(x-t)$ の，t に関する積分ということである．さて，パラメーター α を含む超関数に関する定義 4.1，とくに (4.2.4) 式，によれば

$$\int f(x,\alpha)d\alpha \overset{\text{def}}{=} \text{H.F.}\int F(z,\alpha)d\alpha,$$
$$F(z,\alpha) = \text{G.F.}\, f(x,\alpha)$$

である．この定義で，$\alpha\to t, f(x,\alpha)\to\varphi(t)f(x-t)$ とおきかえると，$F(z,\alpha)\to\varphi(t)F(z-t)$ とすることになるから，(4.4′) はけっきょく (4.4)，(4.2) と同じであることがわかるだろう．(4.5′) が (4.5)，(4.3) と同じであることも同様にして確かめられる．(4.4′)，(4.5′) の表現は一見簡潔ではあるが，パラメーター t に関する積分（その結果は x の超関数である）と変数 x に関する積分（その結果は数値，あるいは変数 t のふつうの関数である）とを混同しやすいので，本書では定義 1 の表現を使うことにする．たとえば，(4.5′) に従って

$$\delta(x)*\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\delta(x-t)dt$$

と表わしたとき，右辺の定積分はなにを意味するのか？　このような疑問は (4.5) の表現では生じないのである．

とくに (4.4′) の表現で $\varphi(x)$ が解析関数のばあいには，$\varphi(t)f(x-t)$ は t の超関数としても意味があるので，右辺の積分は 2 通りの解釈を許すことになる．すなわち，（i）超関数 $\varphi(t)f(x-t)$ の t に関する定積分，（ii）$\text{H.F.}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)F(z-t)dt$，の 2 つである．（i）は x のふつうの関数，（ii）は超関数であるから，両者はまったく別物である．もっとも，(4.5′) については，慎重に考えればそのような混同は避けられる．2 つの超関数の積なるものは一般に定義されていないので，（i）の解釈は許されないからである．

たたみこみを上のように定義すると，つぎの諸定理が成り立つ．

[定理 1]（交換法則） つぎの関係が成り立つ．

$$\varphi_1(x)*\varphi_2(x) = \varphi_2(x)*\varphi_1(x), \tag{4.6}$$

$$f_1(x)*f_2(x) = f_2(x)*f_1(x). \tag{4.7}$$

（証明）（4.6）の関係はすでに（1.6）として証明されている．（4.7）を証明するためには，まず

$$f_1(x)*f_2(x) = \text{H.F. } H(z), \tag{4.8}$$

$$H(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)F_2(z-t)dt \tag{4.9}$$

を考える．$F_2(z)$ は z の解析関数であるから，$F_2(z-t)$ は t の解析関数である．したがって，$f_1(t)F_2(z-t)$ は超関数と解析関数の積として超関数であって，(4.9) の右辺はそれの定積分である．それゆえ，これを母関数の複素積分として表わすことができる．さて，G.F.$\{f_1(t)F_2(z-t)\}=F_1(t)F_2(z-t)$ であるから，

$$H(z) = \int_C F_1(t)F_2(z-t)dt. \tag{4.10}$$

ただし，積分路Cは図2のⅠ＋Ⅱである（図の t_r, s_r はそれぞれ t, s の実数部を意味する）．点 $t=z$ が積分路Cの外部，つまりⅠの上側（$\mathrm{Im}\, z>0$ のばあい）あるいはⅡの下側（$\mathrm{Im}\, z<0$ のばあい）にあることに注意しなければならない．

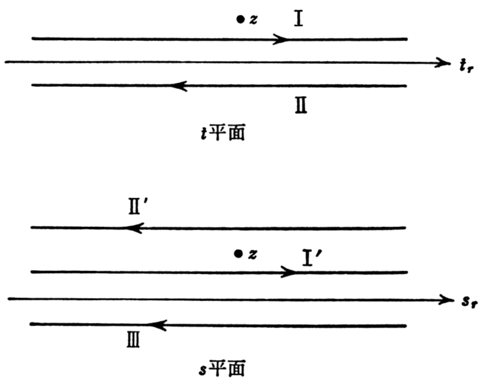


図 2

いま，

$$z-t = s \tag{4.11}$$

として s 平面に移ると，(4.10) は

$$H(z) = \int_{C'} F_2(s)F_1(z-s)ds \tag{4.12}$$

となる．ただし，積分路 C′ は図のⅠ′＋Ⅱ′ となり，点 $s=z$ は C′ の内部にくる．

あらかじめ I，II の間隔を十分小さくとっておくと，s 平面では I′，II′ は実数軸に対して同じ側にあることになる．そこで，図のように，実数軸に対して I′，II′ と反対側に積分路 III をとる．そうすると

$$\int_{C'} = \int_{I'} + \int_{II'} = \int_{I'+III} - \int_{III-II'} \tag{4.13}$$

となる．I′＋III は実数軸を挟む積分路であるから

$$\int_{I'+III} = \text{G.F.}\{f_2(x)*f_1(x)\}. \tag{4.14}$$

つまり，(4.10) の F_1 と F_2 とを入れかえ，積分変数を t から s に変えただけだからである．また，積分路 III−II′ に沿っては $\text{Im}(z-s)\neq 0$ であるから，$F_1(z-s)$ は z の解析関数として正則である．しかも，$\text{Im}\, z=0$ としてもそうである．したがって

$$\int_{III-II'} = \Phi(z) \tag{4.15}$$

とおくと，$\Phi(z)$ は x 軸上で正則な解析関数である．そこで (4.12)～(4.15) をあわせ考えると

$$\text{G.F.}\{f_1(x)*f_2(x)\} = H(z) = \text{G.F.}\{f_2(x)*f_1(x)\} - \Phi(z)$$

となり，H.F. をとればけっきょく (4.7) が得られるのである．∎

[定理 2]　つぎの関係が成り立つ．

$$f_1(x)*f_2(x) = \begin{cases} \{\text{O.F.}f_1(x)\}*f_2(x), \\ \{\text{O.F.}f_2(x)\}*f_1(x), \end{cases} \tag{4.16}$$

$$\text{O.F.}\{\varphi(x)*f(x)\} = \varphi(x)*\{\text{O.F.}f(x)\}, \tag{4.17}$$

$$\text{O.F.}\{f_1(x)*f_2(x)\} = \{\text{O.F.}f_1(x)\}*\{\text{O.F.}f_2(x)\}. \tag{4.18}$$

ただし，右辺が存在するものとする．

（証明）　O.F.$f(x)$ というのは超関数 $f(x)=$H.F. $F(z)$ を見直したふつうの関数のことで

$$\text{O.F.}f(x) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\{F_+(x+i\varepsilon)-F_-(x-i\varepsilon)\} \tag{4.19}$$

によって定義される．一般に

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \{\text{O.F.}f(x)\}dx \tag{4.20}$$

の関係が右辺の定積分が存在するという条件のもとに成り立つことは明らかである．（超関数の定積分の定義 2.13 の‘合理性’で，実質的に (4.20) が証明されている．）

まず，(4.16) を証明しよう．

$$\{\mathrm{O.F.}f_1(x)\}*f_2(x) = \mathrm{H.F.}\,H(z) \tag{4.21}$$

とすれば，定義1の (4.4) と (4.2) により

$$H(z) = \int_{-\infty}^{\infty}\{\mathrm{O.F.}f_1(t)\}F_2(z-t)dt \tag{4.22}$$

である． さて，$f_1(t)F_2(z-t)$ は超関数と解析関数の積として t の超関数である．そして，これを見直したふつうの関数が存在して

$$\mathrm{O.F.}\{f_1(t)F_2(z-t)\} = \{\mathrm{O.F.}f_1(t)\}F_2(z-t)$$

であることは明らかである．この関係を (4.22) に代入し，さらに (4.20) を考えると

$$H(z) = \int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)F_2(z-t)dt \tag{4.23}$$

が得られる． これは $f_1(x)*f_2(x)$ の母関数にほかならない． これで (4.16) の第1式が証明された． $f_1(x)*f_2(x)=f_2(x)*f_1(x)$ であるから，この右辺に上の結果を適用すると第2式が得られる．

つぎに，(4.17) を証明する．O.F. の定義を思い起こすと

$$\begin{aligned}\varphi(x)*\{\mathrm{O.F.}f(x)\} &= \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\lim_{\varepsilon\to0}\{F_+(x+i\varepsilon-t)-F_-(x-i\varepsilon-t)\}dt\\ &= \lim_{\varepsilon\to0}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\{F_+(x+i\varepsilon-t)-F_-(x-i\varepsilon-t)\}dt\\ &= \lim_{\varepsilon\to0}\{H_+(x+i\varepsilon)-H_-(x-i\varepsilon)\}\\ &= \mathrm{O.F.}h(x).\end{aligned}$$

ただし，lim と ∫ の順序変更が可能であると仮定し，また

$$H(z) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)F(z-t)dt \tag{4.24}$$

とおいてある． もちろん， $h(x)=\mathrm{H.F.}\,H(z)=\varphi(x)*f(x)$ である．これで (4.17) が証明された．

つぎに，(4.17) 式で $\varphi(x)\equiv\mathrm{O.F.}f_1(x)$, $f(x)\equiv f_2(x)$ とおくと

$$\mathrm{O.F.}[\{\mathrm{O.F.}f_1(x)\}*f_2(x)] = \{\mathrm{O.F.}f_1(x)\}*\{\mathrm{O.F.}f_2(x)\}$$

となる．ここで (4.16) を考慮すると，ただちに (4.18) が得られるのである．∎

注意 上の定理を適用する際にとくに注意すべきことは，右辺の存在が前提になっていることである． たとえば $\mathrm{O.F.}\,\delta(x)=0$ $(x\neq0)$ は $x=0$ では定義されていないから，$\varphi(x)*\{\mathrm{O.F.}\,\delta(x)\}$ や $f(x)*\{\mathrm{O.F.}\delta(x)\}$ などは意味をなさないのである．逆に，右辺が存在しなくても左辺が意味をもつことも大いにあり得る．たとえば，あとで見るように，任意

の超関数 $f(x)$ に対して $f(x)*\delta(x)=f(x)$ の関係が成り立つので O.F. $\{f(x)*\delta(x)\}=$ O.F. $f(x)$ は確かに意味をもつが，O.F. $f(x)*$ O.F. $\delta(x)$ は存在しないのである．

[定理 3]　$f(x)$ は超関数，$\varphi(z)$ は x 軸上で正則な z の解析関数であるとする．このとき

$$\text{O.F.}\{\varphi(x)*f(x)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)f(x-t)dt \tag{4.25}$$

が成り立つ．ただし右辺は t の超関数 $\varphi(t)f(x-t)$ の定積分である．

（証明）

$$\varphi(x)*f(x) = \text{H.F.}H(z),$$
$$H(z) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)F(z-t)dt \tag{4.26}$$

とおけば

$$H_+(x+i\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)F_+(x+i\varepsilon-t)dt.$$

積分変数を $t\to t+i\varepsilon$ と変更すれば，右辺の定積分は t 平面上の積分路Ⅱ（図３）に沿う複素積分で表わされる：

$$\begin{aligned}H_+(x+i\varepsilon) &= -\int_{\mathrm{II}}\varphi(t+i\varepsilon)F_+(x-t)dt\\ &= -\int_{\mathrm{II}}\varphi(t)F_+(x-t)dt+O(\varepsilon).\end{aligned}$$

ただし，$\varphi(t+i\varepsilon)=\varphi(t)+O(\varepsilon)$ のように展開し，$\int O(\varepsilon)\cdot F_+(x-t)dt=O(\varepsilon)$ と仮定した．（$|t|\to\infty$ での $f(t)$ の性質を適当に仮定すればこのことは許される．）

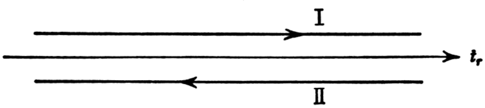


図 3

同様にして

$$H_-(x-i\varepsilon) = \int_{\mathrm{I}}\varphi(t)F_-(x-t)dt+O(\varepsilon)$$

が得られる．したがって

$$\begin{aligned}&H_+(x+i\varepsilon)-H_-(x-i\varepsilon)\\ &= -\int_{\mathrm{I}}\varphi(t)F_-(x-t)dt-\int_{\mathrm{II}}\varphi(t)F_+(x-t)dt+O(\varepsilon)\\ &= -\int_{\mathrm{I}+\mathrm{II}}\varphi(t)F(x-t)dt+O(\varepsilon)\end{aligned} \tag{4.27}$$

である．ただし，積分路 I，II に沿っては $\mathrm{Im}(x-t)=-\mathrm{Im}\,t$ がそれぞれ負または正になることを考慮した．

さて，超関数 $\varphi(x)f(a-x)$ (a=実数) の母関数は $-\varphi(z)F(a-z)$ である．それゆえ

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)f(a-x)dx=-\int_{\mathrm{I}+\mathrm{II}}\varphi(z)F(a-z)dz.$$

ここで積分変数 x, z の代りに t と書き，また実数 a を x と書きかえると，(4.27) の積分が得られ，したがって

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\{H_+(x+i\varepsilon)-H_-(x-i\varepsilon)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)f(x-t)dt$$

が得られる．これは (4.25) にほかならない．■

[定理 4]　超関数 $f_1(x), f_2(x)$ はそれぞれ特異点 $x=\sigma$, $x=\tau$ をもつものとする．このとき，$x\neq\sigma+\tau$ に対して

$$\mathrm{O.F.}\{f_1(x)*f_2(x)\}=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)\cdot f_2(x-t)dt \tag{4.28}$$

が成り立つ．ただし，右辺は 2 つの超関数 $f_1(t), f_2(x-t)$ の積の定積分である．また，特異点 $x=\sigma$, $x=\tau$ はそれぞれ複数個あってもよい．

（証明）　定義により

$$f_1(x)*f_2(x)=\mathrm{H.F.}\,H(z), \tag{4.29}$$

$$H(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)F_2(z-t)dt \tag{4.30}$$

である．証明を見易くするために

$$F_3(z)\equiv -F_2(-z),$$

$$f_3(x)=\mathrm{H.F.}\,F_3(z)=f_2(-x) \tag{4.31}$$

とおこう．そうすると，(4.30) は

$$H(z)=-\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)F_3(t-z)dt=-\int_{\mathrm{C}}F_1(t)F_3(t-z)dt$$

となる．ただし，積分路 $\mathrm{C}=\mathrm{C}_++\mathrm{C}_-$ の外部に点 $t=z$ がくるようにする(図 4)．

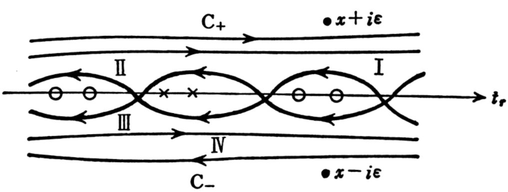


図 4

さて

$$\text{O.F.}\{f_1(x)*f_2(x)\}=\lim_{\varepsilon\to0}\{H_+(x+i\varepsilon)-H_-(x-i\varepsilon)\} \qquad (4.32)$$

である．まず $H_+(x+i\varepsilon)$ を考える．

$$H_+(x+i\varepsilon)=-\int_{C_+}F_{1+}(t)F_{3-}(t-x-i\varepsilon)dt$$
$$-\int_{C_-}F_{1-}(t)F_{3-}(t-x-i\varepsilon)dt.$$

図4で○, ×はそれぞれ母関数 $F_1(t), F_2(t)$ の特異点を示す．積分路 C_- は積分路 $-$IV に変形することができる．被積分関数の特異点を通過しないからである．これに反して積分路 C_+ は $F_3(t)$ の特異点×を通って押し下げて積分路 $-$II まで変形することができる．被積分関数 $F_{1+}(t)F_{3-}(t-x-i\varepsilon)$ の特異点を通過することにはならないからである．(F_3 の引数は C_+ 上ですでに $\mathrm{Im}(t-x-i\varepsilon)<0$ であったから，積分路を押し下げても特異点を通ることはない！ また，$F_1(t)$ の特異点○を通過していない．) したがって

$$H_+(x+i\varepsilon)=\int_{\mathrm{II}}F_{1+}(t)F_{3-}(t-x-i\varepsilon)dt$$
$$+\int_{\mathrm{IV}}F_{1-}(t)F_{3-}(t-x-i\varepsilon)dt.$$

同様の考察で

$$H_-(x-i\varepsilon)=-\int_{\mathrm{I}}F_{1+}(t)F_{3+}(t-x+i\varepsilon)dt$$
$$-\int_{\mathrm{III}}F_{1-}(t)F_{3+}(t-x+i\varepsilon)dt$$

が得られる．これらを (4.32) に代入すると

$$\begin{aligned}
&\text{O.F.}\{f_1(x)*f_2(x)\}\\
&=\int_{\mathrm{I}}F_{1+}(t)F_{3+}(t-x)dt+\int_{\mathrm{II}}F_{1+}(t)F_{3-}(t-x)dt\\
&\quad+\int_{\mathrm{III}}F_{1-}(t)F_{3+}(t-x)dt+\int_{\mathrm{IV}}F_{1-}(t)F_{3-}(t-x)dt\\
&\equiv\int_{C}F_1(t)F_3(t-x)dt\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)\cdot f_3(t-x)dt\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)\cdot f_2(x-t)dt,
\end{aligned}$$

すなわち証明すべき式 (4.28) となる．ただし，超関数の積の定積分に関する

定理 12.4 を使っている．その際，$f_1(t)$, $f_3(t-x)$ が共通の特異点をもたないという条件があるので，$\sigma \neq -(\tau-x)$，すなわち $x \neq \sigma+\tau$ が要求されるのである．▮

定理 2, 定理 3, 定理 4 は超関数のたたみこみに関する定義 1 の合理性を示すものである．また，定理 4 は定理 3 を特別なばあいとして含むことも容易にわかる．($f_1(x)$ として特異点をもたない超関数をとると，O.F.$f_1(x) \equiv \varphi(x)$ は x の解析関数である．このとき定理の (4.2) により $f_1(x)*f_2(x)=\varphi(x)*f_2(x)$ である！)

§5. 基本的なたたみこみ

超関数について‘たたみこみ’を定義し，ふつうの関数のばあいの‘たたみこみ’との関連を調べてきたのであるが，この辺で具体的な例について様子を見てみよう．もっとも基本的な超関数として，まず δ 関数のばあいを考える．

[定理 5]　$\varphi(x)$ は $(-\infty, \infty)$ で絶対積分可能のふつうの関数とする．このとき，$\varphi(x)*\delta(x)$ は $\varphi(x)$ を見直した超関数である．

(証明)　定義 1 により

$$\varphi(x)*\delta(x) = \text{H.F.}\,H(z), \tag{5.1}$$

$$H(z) = \varphi(x)*\delta(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\delta(z-t)\,dt. \tag{5.2}$$

ただし

$$\delta(z) = -\frac{1}{j}\frac{1}{z} \tag{5.3}$$

は $\delta(x)$ の母関数である．それゆえ，(5.2) は

$$H(z) = \frac{1}{j}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt \tag{5.4}$$

となる．これは，ふつうの関数 $\varphi(x)$ を超関数と見直すときの母関数を与える式である．▮

例 1　$\varphi(x)$ を $(-\infty, \infty)$ で絶対積分可能のふつうの関数とすれば

$$\text{O.F.}\{\varphi(x)*\delta(x)\} = \frac{1}{2}\{\varphi(x+0)+\varphi(x-0)\} \tag{5.5}$$

である．

これは定理 5 からただちにわかる．あるいは，定理 2.2 そのものであるといってもよい．このばあい，定理 2, 定理 3 はどちらも適用できない．それはなぜか？（その考察は読者にまかせる．)

[定理 6]　任意の超関数 $f(x)$ に対して

$$f(x)*\delta(x)=f(x) \tag{5.6}$$

が成り立つ.

(証明)
$$f(x)=\text{H.F.}F(z), \tag{5.7}$$
$$f(x)*\delta(x)=\text{H.F.}H(z) \tag{5.8}$$

とする．定理1により $f(x)*\delta(x)=\delta(x)*f(x)$ であるから，定義1は

$$H(z)=\delta(x)*F(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)F(z-t)dt=F(z) \tag{5.9}$$

を与える．ただし，$F(z-t)$ が t の解析関数であることと，δ 関数の性質が使ってある．(5.7)〜(5.9) からただちに (5.6) が得られる．∎

例 2　つぎの関係が成り立つ.

$$\delta(x)*\delta(x)=\delta(x). \tag{5.10}$$

定理5で $f(x)$ として $\delta(x)$ をとれば，この結果が得られる．定義1に関して注意したように，(5.10) を (4.5′) の形，すなわち

$$\delta(x)*\delta(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\delta(x-t)dt=\delta(x) \tag{5.11}$$

のように表わすこともできる．しかし，この表現では，中辺を

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\cdot\delta(x-t)dt=\text{O.F.}\{\delta(x)*\delta(x)\} \qquad (\text{定理 }4)$$
$$=\text{O.F.}\delta(x)=0 \quad (x\neq 0)$$

と間違えやすいので，避ける方がよい.

[定理 7]　超関数 $f(x)$ が標準母関数 $\tilde{F}(z)$ をもつならば

$$\tilde{F}(z)=f(x)*\delta(z), \tag{5.12}$$
$$[\tilde{F}(x)]_{\pm}=f(x)*[\delta(x)]_{\pm} \tag{5.13}$$

が成り立つ．ただし，$\delta(z)=-1/jz$ は $\delta(x)$ の母関数である.

(証明)　(5.12) は単に標準母関数の定義 10.3 の書きかえである．(実は，この定義に忠実にしたがうためには，‘たたみこみ’の定義をすこし拡張して，後述の‘P たたみこみ’を使わなければならない.) (5.12) の両辺に $1_{\pm}(z)$ を掛けて H.F. をとれば (5.13) が得られる．∎

[定理 8]　超関数 $f(x)$ が標準母関数 $\tilde{F}(z)$ をもつならば

$$f(x)*\frac{1}{x}=-j\text{H.F.}\{\tilde{F}(z)1(z)\} \tag{5.14}$$

が成り立つ.

(証明)　(5.13) の両辺に

$$[\delta(x)]_\pm = -\frac{1}{j}\left[\frac{1}{x}\right]_\pm = -\frac{1}{j}\left\{\frac{1}{x}\mp\pi i\delta(x)\right\},$$

$$[\tilde{F}(x)]_\pm = \text{H.F.}\{\tilde{F}(z)1_\pm(z)\}$$

を代入して，＋,－ のばあいを加え合わせると

$$\text{H.F.}[\tilde{F}(z)\{1_+(z)+1_-(z)\}] = -\frac{2}{j}f(x)*\frac{1}{x}$$

が得られる．ここで $1_+(z)+1_-(z)=21(z)$ を考慮すると，ただちに (5.14) が得られる．∎

例 3
$$\frac{1}{x}*\frac{1}{x} = -\pi^2\delta(x). \tag{5.15}$$

これを得るには，定理 8 で $f(x)=1/x$ とすればよい．すなわち，このばあい $\tilde{F}(z)=z^{-1}1(z)$ であるから

$$-j\tilde{F}(z)1(z) = -j\frac{1}{z}[1(z)]^2 = -\frac{j}{4}\frac{1}{z}$$
$$= \frac{j^2}{4}\delta(z), \qquad \delta(z) = -\frac{1}{jz}.$$

これの H.F. をとれば (5.15) が得られる．

§6.　たたみこみの基本的性質

たたみこみは**合成積**ともよばれることがあり，**積**とひじょうによく似た性質がある．実際，交換法則が成り立つことはすでに定理 1 で見たとおりである．このほか，積に対応するたたみこみの諸性質を以下に示そう．

まず，たたみこみの定義を思い出そう：

$$f_1(x)*f_2(x) = h(x) = \text{H.F.}\,H(z), \tag{6.1}$$

$$H(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)F_2(z-t)dt. \tag{6.2}$$

ただし $f_2(x)=\text{H.F.}F_2(z)$ である．この定義から，つぎの 2 つの定理は明らかであろう．

[定理 9] (線形性)　$f_1(x), f_2(x)$ を超関数，c を複素数とすれば

$$\{cf_1(x)\}*f_2(x) = f_1(x)*\{cf_2(x)\} = c\{f_1(x)*f_2(x)\} \tag{6.3}$$

が成り立つ．

[定理 10] (配分法則)　超関数 $f(x), f_1(x), f_2(x)$ について

$$\{f_1(x)+f_2(x)\}*f(x) = f_1(x)*f(x)+f_2(x)*f(x), \tag{6.4}$$

$$f(x)*\{f_1(x)+f_2(x)\} = f(x)*f_1(x)+f(x)*f_2(x) \tag{6.5}$$

が成り立つ.

つぎに，結合法則を証明する．それには，まずつぎの定理を証明する.

[定理 11]　$f_1(x), f_2(x)$ を超関数，$F(z)$ を母関数とすれば

$$f_1(x)*\{f_2(x)*F(z)\}=f_2(x)*\{f_1(x)*F(z)\} \tag{6.6}$$

が成り立つ.

（証明）

$$f_1(x)*\{f_2(x)*F(z)\}=H(z), \tag{6.7}$$

$$f_2(x)*\{f_1(x)*F(z)\}=K(z) \tag{6.8}$$

とおく．(4.3) 式，すなわち超関数と母関数のたたみこみの定義式，により

$$H(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)dt\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t')F\{(z-t)-t'\}dt'$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t')F(z-t-t')dtdt'. \tag{6.9}$$

同様に

$$K(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)f_1(t')F(z-t-t')dtdt' \tag{6.10}$$

である．(6.9) の積分変数 t, t' を t', t に入れかえると (6.10) になるから，$H(z)=K(z)$ である．∎

[定理 12]（結合法則）　超関数 $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ について

$$\{f_1(x)*f_2(x)\}*f_3(x)=f_1(x)*\{f_2(x)*f_3(x)\} \tag{6.11}$$

が成り立つ．したがって，括弧をとり除いて $f_1(x)*f_2(x)*f_3(x)$ と書いても，これは3つの超関数のたたみこみとして一義的にきまる．ただし，たたみこみがすべて存在して交換可能であるとする.

（証明）　定理 11 の (6.6) 式の H.F. をとる．まず，左辺は

$$\begin{aligned}&\mathrm{H.F.}[f_1(x)*\{f_2(x)*F(z)\}]\\&=f_1(x)*\mathrm{H.F.}\{f_2(x)*F(z)\} \qquad \because\ (4.5)\\&=f_1(x)*\{f_2(x)*\mathrm{H.F.}\,F(z)\} \qquad \because\ (4.5)\\&=f_1(x)*\{f_2(x)*f(x)\}\end{aligned} \tag{6.12}$$

となる．同様に右辺は

$$\mathrm{H.F.}[f_2(x)*\{f_1(x)*F(z)\}]=f_2(x)*\{f_1(x)*f(x)\} \tag{6.13}$$

となる．ところが，交換法則により (6.12), (6.13) はそれぞれ

$$f_1(x)*\{f(x)*f_2(x)\},\quad \{f_1(x)*f(x)\}*f_2(x)$$

と書きかえられる．これらの2式を等しいと置いて，$f(x)\to f_2(x), f_2(x)\to f_3(x)$

と書きかえると，けっきょく(6.11)が得られる． ▮

この定理をくりかえし適用することによって，つぎの定理が得られる．

［定理 13］ n個の超関数のたたみこみを

$$f_1(x)*f_2(x)*\cdots*f_n(x)$$

と書いてもあいまいさを生じない．

交換，配分，結合の3法則が成り立つことから，たたみこみの演算がふつうの積と同じように行なえることがわかる．定理6により，任意の超関数$f(x)$に対して$f(x)*\delta(x)=f(x)$が成り立つから，たたみこみでは$\delta(x)$が積における1の役割を演ずるのである．

§7. たたみこみの計算

つぎに，たたみこみの計算に際して役立つ簡単な定理をいくつか挙げよう．

［定理 14］ $f_1(x)*f_2(x)$が存在するならば

$$\frac{d}{dx}\{f_1(x)*f_2(x)\}=f_1'(x)*f_2(x)=f_1(x)*f_2'(x) \tag{7.1}$$

が成り立つ．

（証明）

$$f_1(x)*f_2(x)=h(x)=\mathrm{H.F.}\,H(z) \tag{7.2}$$

とおけば，(6.1)，(6.2)により

$$H(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)F_2(z-t)dt \tag{7.3}$$

である．さて

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}h(x)&=\mathrm{H.F.}\frac{d}{dz}H(z)\\&=\mathrm{H.F.}\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)F_2'(z-t)dt \qquad \because\ (7.3)\\&=\mathrm{H.F.}\{f_1(x)*F_2'(z)\} \qquad \because\ (4.3)\\&=f_1(x)*\mathrm{H.F.}\,F_2'(z) \qquad \because\ (4.5)\\&=f_1(x)*f_2'(x).\end{aligned}$$

これで(7.1)の中辺を除く等式が証明された．ここで添字1，2を入れかえ，たたみこみの交換法則を使うと，第1番目の等式が得られる． ▮

(7.1)の等式の右側の部分はつぎのように解釈できる．すなわち，d/dxという微分演算がたたみこみの演算記号$*$を超えて自由に移り得るのである．

例 4　つぎの関係が成り立つ．

$$f(x)*\delta^{(n)}(x)=f^{(n)}(x). \tag{7.4}$$

これを証明するには，$f(x)*\delta(x)=f(x)$ を n 回微分すればよい．

[定理 15]　つぎの等式が成り立つ．

$$x\{f_1(x)*f_2(x)\}=\{xf_1(x)\}*f_2(x)+f_1(x)*\{xf_2(x)\}. \tag{7.5}$$

ただし，両辺の各項が存在するものとする．

（証明）　(7.2), (7.3) のようにおけば

$$x\{f_1(x)*f_2(x)\}=\text{H.F.}\{zH(z)\}. \tag{7.6}$$

ここで

$$\begin{aligned} zH(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)zF_2(z-t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)(z-t)F_2(z-t)dt+\int_{-\infty}^{\infty} tf_1(t)F_2(z-t)dt \\ &= f_1(x)*\{zF_2(z)\}+\{xf_1(x)\}*F_2(z). \end{aligned} \tag{7.7}$$

ただし (4.3) を使う．(7.7) を (7.6) の右辺に代入し，(4.5) を考慮すると (7.5) が得られる．∎

[定理 16]　a, b, c を実数，$f_1(x), f_2(x)$ を超関数，$h(x)=f_1(x)*f_2(x)$ とする．このとき

$$f_1(ax+b)*f_2(ax+c)=\frac{1}{|a|}h(ax+b+c) \tag{7.8}$$

が成り立つ．

（証明）　(7.2), (7.3) のようにおく．たたみこみの定義 1 の (4.5) 式により

$$\text{G.F.}\{f_1(ax+b)*f_2(ax+c)\}=f_1(ax+b)*\text{G.F.}f_2(ax+c).$$

ところが，定義 3.8 によれば，一般に $f(x)=\text{H.F.}\,F(z)$ のとき

$$f(ax+b)=\operatorname{sgn} a\,\text{H.F.}\,F(az+b) \tag{7.9}$$

である．したがって，上の式はつぎのように変形できる．

$$\begin{aligned} &= \operatorname{sgn} a\, f_1(ax+b)*F_2(az+c) \\ &= \operatorname{sgn} a\int_{-\infty}^{\infty} f_1(at+b)F_2\{a(z-t)+c\}dt \\ &= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(s)F_2\{(az+b+c)-s\}ds. \end{aligned}$$

ただし，$at+b=s$ として積分変数を t から s にかえ，さらに，$a<0$ のときには積分の上限と下限が入れかわることを考慮した．さらに変形を続けると

$$= \frac{1}{a} f_1(x) * F_2(az+b+c)$$

$$= \frac{1}{a} H(az+b+c).$$

ただし，$f_1(x)*F_2(z)=H(z)$ を考慮する．ここで H.F. をとり，(7.9) を考慮すると，(7.8) が得られるのである．∎

[定理 17] $f_1(x)*f_2(x)=h(x)$ とすれば，

$$\overline{f_1(x)} * \overline{f_2(x)} = \overline{h(x)}$$

である．

（証明） 定義 3.3 によれば，一般に $f(x)=$H.F. $F(z)$ のとき

$$\overline{f(x)} = -\text{H.F.}\ \overline{F(\bar{z})} \tag{7.10}$$

である．さて

$$\begin{aligned} \text{G.F.}\{\overline{f_1(x)} * \overline{f_2(x)}\} &= \overline{f_1(x)} * \text{G.F.}\overline{f_2(x)} \\ &= -\overline{f_1(x)} * \overline{F_2(\bar{z})} \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f_1(t)}\ \overline{F_2(\bar{z}-t)}dt \\ &= -\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)F_2(\bar{z}-t)dt\right\}^*. \end{aligned}$$

ただし，* 印は複素共役を意味する．ところが

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)F_2(\bar{z}-t)dt = f_1(x)*F_2(\bar{z}) = H(\bar{z}).$$

ここで $H(z)=f_1(x)*F_2(z)=$G.F. $h(x)$ である．したがって

$$\text{G.F.}\{\overline{f_1(x)} * \overline{f_2(x)}\} = -\overline{H(\bar{z})}.$$

両辺の H.F. をとり，(7.10) を考慮すれば，定理の結論が得られる．∎

[定理 18] 偶(奇)超関数どうしのたたみこみは偶超関数，また，偶超関数と奇超関数とのたたみこみは奇超関数である．

（証明） $f_1(x), f_2(x)$ を偶超関数とすれば，

$$f_1(-x) = f_1(x), \quad f_2(-x) = f_2(x)$$

である．したがって

$$\begin{aligned} h(x) &= f_1(x)*f_2(x) \\ &= f_1(-x)*f_2(-x) \\ &= h(-x). \end{aligned} \tag{7.11}$$

ただし，定理 16 の (7.8) 式で $a=-1$, $b=c=0$ とおいたものを使う．(7.11)

は $f_1(x)*f_2(x)$ が偶超関数であることを示す．その他のばあいも同様に証明できる．▮

[定理 19]　実(虚)超関数どうしのたたみこみは実超関数，また，実超関数と虚超関数とのたたみこみは虚超関数である．

(証明)　$f_1(x), f_2(x)$ をともに実超関数とすれば

$$f_1(x)=\overline{f_1(x)},\quad f_2(x)=\overline{f_2(x)}$$

である．したがって

$$\begin{aligned} h(x) &= f_1(x)*f_2(x) \\ &= \overline{f_1(x)}*\overline{f_2(x)} \\ &= \overline{h(x)}. \end{aligned} \tag{7.12}$$

ただし，定理 17 を使う．(7.12) は $f_1(x)*f_2(x)$ が実超関数であることを示す．その他のばあいも同様に証明できる．▮

§8.　たたみこみが存在するための十分条件

これまでの議論では，2 つの超関数 $f_1(x), f_2(x)$ のたたみこみが存在することを暗黙のうちに仮定してきた．たたみこみは無限積分で定義されているのであるから，任意の 2 つの超関数についてたたみこみが存在することはもちろん期待できない．しかし，実際上現われる多くのばあいに，たたみこみの存在が保証されるのである．ここでは，簡単でしかも比較的に適用範囲の広い十分条件を述べる．

[定理 20]　中央超関数と任意の超関数のたたみこみは存在する．

(証明)　$f(x)=\mathrm{H.F.}\,F(z)$ を中央超関数，$f_1(x)=\mathrm{H.F.}\,F_1(z)$ を任意の超関数とする．$f(x)$ は中央超関数であるから，適当に大きい $c>0$ をとると，$|x|>c$ に対して $f(x)=0$．また，$F(z)$ は x 軸上の区間 $|x|>c$ で正則である．

まず $f(x)*f_1(x)$ を考えよう．これが存在するためには，その母関数

$$f(x)*F_1(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)F_1(z-t)dt$$

が存在すればよい．ところが，$f(t)=0,\ |t|>c$ であるから，この無限積分は実質的に有限積分であり，したがって確かに $f(x)*F_1(z)$ は存在するのである．

つぎに $f_1(x)*f(x)$ を考える．その母関数は

$$f_1(x)*F(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)F(z-t)dt$$

である．この無限積分の意味は

$$\int_{-\infty}^{\infty}=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_a^b \tag{8.1}$$

である．上述のように，$F(z)$ は x 軸上の区間 $(-\infty,-c)$, (c,∞) で正則であるから，$F(z-t)$ は $t<x-c$, $t>x+c$ に対して，x 軸上で正則な z の解析関数である．そこで，$|a|, b$ を十分大きく選び

$$\int_a^b=\int_a^{x-c}+\int_{x-c}^{x+c}+\int_{x+c}^b$$

と書けば，$\int_a^{x-c}, \int_{x+c}^b$ はともに x 軸上で正則な z の解析関数となる．これらは母関数としては0**と同等**である．これらをとり除くと，けっきょく無限積分は実質的に有限積分となり $f_1(x)*F(z)$ が存在する．∎

注意 たたみこみの交換法則（定理1）を利用すれば，上の証明の前半，つまり $f(x)*f_1(x)$ の存在だけをいえばよさそうであるが，実はそれではいけない．定理1の証明では，$f_1(x)*f_2(x)$ と $f_2(x)*f_1(x)$ とがともに存在することを前提としているからである．もっとも，証明をすこし修正すれば，$f_1(x)*f_2(x)$ の存在を仮定するだけで $f_2(x)*f_1(x)$ の存在が結論され，したがって交換法則も成り立つことがいえる（定理14を参照）．このようにすれば，上の証明の後半は不要になる．

[定理 21] 左(右)超関数どうしのたたみこみは存在する．

（証明） 定理20の証明の後半と同じ論法を使う．まず $f_1(x)=\mathrm{H.F.}\ F_1(z)$, $f_2(x)=\mathrm{H.F.}\ F_2(z)$ がともに右超関数のばあいを考える．適当に大きい $c>0$ をとれば，$x<-c$ に対して $f_1(x)=0$, $f_2(x)=0$ であって，したがって $F_1(z)$, $F_2(z)$ は x 軸上の区間 $(-\infty,-c)$ で正則な z の解析関数である．

$$\begin{aligned}f_1(x)*F_2(z)&=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)F_2(z-t)dt\\&=\lim_{b\to\infty}\int_{-c}^{b}f_1(t)F_2(z-t)dt\end{aligned}$$

を考えよう．$F_2(z-t)$ は $t>x+c$ に対して，x 軸上で正則な解析関数であるから，

$$\int_{-c}^{b}=\int_{-c}^{x+c}+\int_{x+c}^{b}$$

と書くと，右辺の第2項は x 軸上で正則な z の解析関数である．したがって，母関数としてはこれを省略することができる．けっきょく，無限積分は実質的に有限積分に帰着する．

$f_1(x)$, $f_2(x)$ がともに左超関数のばあいも同様である．∎

上の2つの定理は容易につぎのように一般化される．

[定理 22] 任意の実数 a に対して，$f_1(x)f_2(a-x)$ が $|x|\to\infty$ で積分可能であれば，$f_1(x)*f_2(x)$ が存在する．

（証明） 適当に大きい R を選び

$$f_1(x)=f_1(x)H(x;-R,R)+f_{1R}(x),$$
$$f_2(x)=f_2(x)H(x;-R,R)+f_{2R}(x)$$

のように分解する．

$$\begin{aligned}f_1(x)*f_2(x)=&f_1(x)H(x;-R,R)*f_2(x)H(x;-R,R)\\&+f_1(x)H(x;-R,R)*f_{2R}(x)\\&+f_2(x)H(x;-R,R)*f_{1R}(x)\\&+f_{1R}(x)*f_{2R}(x)\end{aligned}\tag{8.2}$$

であるが，$f_1(x)H(x;-R,R)$, $f_2(x)H(x;-R,R)$ は中央超関数であるから，定理20により，(8.2) の右辺のはじめの3項は存在する．したがって，最後の項の存在がいえればよい．さて，$f_{1R}(x)$, $f_{2R}(x)$ の性質を思い起こすと

$$\begin{aligned}\text{G.F.}\{f_{1R}(x)*f_{2R}(x)\}&=\int_{-\infty}^{\infty}f_{1R}(t)F_{2R}(z-t)dt\\&=\int_{-\infty}^{-R}f_1(t)F_2(z-t)dt+\int_R^{\infty}f_1(t)F_2(z-t)dt\end{aligned}$$

であることがわかる．ところが，$f_1(x)f_2(a-x)$ が任意の実数 a に対して $|x|\to\infty$ で積分可能であることから，上式の右辺の2項が存在することが示されるのである．▮

§9. 左(右)超関数どうしのたたみこみ

理工学ではいわゆる初期値問題がしばしば現われる．すなわち，独立変数 x を時間と考え，$x>0$ の範囲だけで関数 $f(x)$ を考えるのである．$x<0$ では $f(x)$ はどうでもよいから，たとえば $f(x)=0$ $(x<0)$ のように仮定しておいてもよい．これは $f(x)$ を右超関数と見なすことに相当する．そこで，初期値問題では，現われる関数はすべて右超関数として扱ってもよいことになる．このようなばあい，つぎの定理が役に立つ．

[定理 23] 左(右)超関数どうしのたたみこみは左(右)超関数である．また，中央超関数どうしのたたみこみは中央超関数である．

（証明） このばあいたたみこみの存在することはすでに定理21で保証されている．

まず，$f_1(x)$, $f_2(x)$ がともに右超関数のばあいを考えよう．いま $f_1(x)=0$

$(x<a)$, $f_2(x)=0$ $(x<b)$ と仮定する.

$$f_1(x)*f_2(x) = h(x) = \text{H.F.}\, H(z), \tag{9.1}$$

$$H(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)F_2(z-t)dt \tag{9.2}$$

とすれば，仮定により

$$\int_{-\infty}^{\infty} = \int_a^{x-b} + \int_{x-b}^{\infty}$$

と書ける．定理21の証明と同様にして

$$\varphi(z) = \int_{x-b}^{\infty} f_1(t)F_2(z-t)dt$$

が x 軸上で正則な z の解析関数であることがわかる．したがって

$$h(x) = \text{H.F.}\int_a^{x-b} f_1(t)F_2(z-t)dt. \tag{9.3}$$

$x-b<a$, すなわち $x<a+b$ に対しては右辺の積分は存在しない．(あるいは, $\varphi(z)$ の中に吸収されるといってもよい！) したがって

$$h(x) = 0,\ \ x<a+b \tag{9.4}$$

である．つまり，$h(x)$ は右超関数である．

$f_1(x)$, $f_2(x)$ が左超関数のばあいも同様に証明できる．また，中央超関数は右かつ左超関数であるから，上の結果により，中央超関数どうしのたたみこみが中央超関数であることがわかる．∎

[定理 24] $f(x)$ を右超関数とする．このとき

$$F(x) \equiv f(x)*H(x) \tag{9.5}$$

に対して

$$F'(x) = f(x), \tag{9.6}$$

$$\text{OF.}F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \tag{9.7}$$

が成り立つ.

(証明) $f(x)$, $H(x)$ はともに右超関数であるから，$F(x)$ が存在し，それは右超関数である．(9.5) の両辺を x について微分すれば，定理14により

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(x)*H'(x) \\ &= f(x)*\delta(x) = f(x). \qquad \because\ (5.6) \end{aligned}$$

すなわち (9.6) が得られた.

つぎに，定理2.7により

$$\int_{-\infty}^{x} F'(x)dx = \text{O.F.}F(x) - \text{O.F.}F(-\infty)$$

であるが，$F(x)$ は右超関数であるから O.F. $F(-\infty)=0$ である．したがって，上の式は (9.7) になる．∎

例 5

$$H(x)*H(x)=xH(x), \tag{9.8}$$

$$\frac{1}{x}H(x)*H(x)=\log|x|H(x). \tag{9.9}$$

これらを証明するには，(9.5) の $F(x)$ としてそれぞれ $xH(x)$, $\log|x|H(x)$ を使えばよい．

定理 24 は，$*H(x)$ という演算が積分 $\int_{-\infty}^{x}\cdots dx$ の演算と同等であることを示す．この事実は，定理の証明から明らかなように，$f(x)$ が右超関数でなくても $f(x)*H(x)$ が存在するかぎり成り立つのである．たとえば $f(x)=1/x^2$ とすると，定理 22 により $f(x)*H(x)$ は存在するから

$$\frac{1}{x^2}*H(x)=-\frac{1}{x} \tag{9.10}$$

が成り立つ．しかし，これと $H(x)$ とのたたみこみはもはや不可能である．

これに反して，$f(x)$ が右超関数のばあいには，

$$\overbrace{H(x)*H(x)*\cdots*H(x)}^{n}*f(x)$$
$$=\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x}f(x)(dx)^n$$

のように，何回でも $H(x)$ とのたたみこみを行なうことができるのである．

§10.　上(下)型超関数のたたみこみ

上型や下型の超関数のたたみこみについて，つぎの諸定理が成り立つ．

[定理 25]　上(下)型の超関数と任意の超関数のたたみこみは，もし存在すれば，上(下)型の超関数である．

（証明）　任意の超関数を $f(x)$, 上型の超関数を $[\varphi(x)]_+=\text{H.F.}\{\varphi(z)\mathbf{1}_+(z)\}$ とする．ただし，$\varphi(z)$ は $0<\text{Im}\,z<A_+$ で正則な解析関数である．たたみこみの定義により

$$f(x)*[\varphi(x)]_+=\text{H.F.}\,H(z), \tag{10.1}$$

$$H(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\varphi(z-t)\mathbf{1}_+(z-t)dt=\psi(z)\mathbf{1}_+(z) \tag{10.2}$$

と書ける．ただし $\mathbf{1}_+(z-t)=\mathbf{1}_+(z)$ に注意し，また

$$\psi(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\varphi(z-t)dt \tag{10.3}$$

とおいた. $\varphi(z-t)$ は $0<\mathrm{Im}\,z<A_+$ で正則であるから, その定積分（パラメーター t についての）として $\phi(z)$ も $0<\mathrm{Im}\,z<A_+$ で正則である. したがって

$$f(x)*[\varphi(x)]_+=[\phi(x)]_+ \tag{10.4}$$

となり, これは上型である. 下型の超関数のばあいについても同様に証明できる. ∎

[定理 26] 上型超関数と下型超関数のたたみこみは, もし存在すれば, 正則である.

（証明） そのたたみこみは, 定理 25 により, 上型でかつ下型である. したがって, 定理 7.4 により正則である. ∎

上の 2 つの定理の特別なばあいとして容易につぎの定理が得られる.

[定理 27] 上(下)超関数と任意の超関数のたたみこみは, もし存在すれば, 上(下)超関数である.

[定理 28] 上超関数と下超関数のたたみこみは, もし存在すれば, 整関数である.

なお, つぎの定理が成り立つ.

[定理 29] 解析関数と任意の超関数のたたみこみは, もし存在すれば, 解析関数である.

[定理 30] 整関数と任意の超関数のたたみこみは, もし存在すれば, 整関数である.

解析関数が上型かつ下型の超関数であることを考慮すれば, 定理 25 からただちに定理 29 が得られる. また, 整関数が上かつ下の超関数であることを考慮すれば, 定理 27 から定理 30 が導かれるのである.

定理 25, 定理 27 はつぎの形に言い表わすこともできる.

[定理 31] 解析関数 $\varphi(z)$ から導かれる超関数 $[\varphi(x)]_\pm$, $\varphi(x+c)$ と任意の超関数 $f(x)$ のたたみこみは, つぎの形に表わされる.

$$f(x)*[\varphi(x)]_\pm=[\phi(x)]_\pm, \tag{10.5}$$

$$f(x)*\varphi(x+c)=\phi(x+c), \tag{10.6}$$

$$\phi(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\varphi(z-t)dt. \tag{10.7}$$

ただし，$\varphi(z)$ の正則領域は，$[\varphi(x)]_\pm$ に対しては $0\leqq \mathrm{Im}\, z \leqq A_\pm$，$\varphi(x+c)$ に対しては $A_- < \mathrm{Im}\, z < A_+$ とし，また $A_- < \mathrm{Im}\, c < A_+$ とする．

（証明） (10.5) はすでに (10.4) として（複号が + のばあいに）与えられている．(10.6) も同様の方法で証明できる．▮

下の例7で見るように，この定理は，$f(x)*[\varphi(x)]_\pm$ が知られているときに $f(x)*\varphi(x+c)$ を求めるばあいなどに利用される．

例 6 つぎの関係が成り立つ．

$$\frac{1}{x}*\frac{1}{x}=-\pi^2\delta(x), \tag{10.8}$$

$$\frac{1}{x}*\left[\frac{1}{x}\right]_\pm=\mp\frac{j}{2}\left[\frac{1}{x}\right]_\pm, \tag{10.9}$$

$$\left[\frac{1}{x}\right]_\pm*\left[\frac{1}{x}\right]_\pm=\mp j\left[\frac{1}{x}\right]_\pm, \tag{10.10}$$

$$\left[\frac{1}{x}\right]_\pm*\left[\frac{1}{x}\right]_\mp=0. \tag{10.11}$$

(10.8) はすでに (5.15) として求められている．(10.9) を得るには (7.2.7) を使えばよい．すなわち

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}*\left[\frac{1}{x}\right]_\pm&=\frac{1}{x}*\left\{\frac{1}{x}\mp\pi i\delta(x)\right\}\\&=\frac{1}{x}*\frac{1}{x}\mp\pi i\frac{1}{x}*\delta(x)\\&=-\pi^2\delta(x)\mp\pi i\frac{1}{x}\\&=\mp\pi i\left\{\frac{1}{x}\mp\pi i\delta(x)\right\}\\&=\mp\frac{j}{2}\left[\frac{1}{x}\right]_\pm.\end{aligned}$$

ただし，2行目から3行目に移る際に (10.8) と (5.6) を使った．(10.10), (10.11) も同様にして得られる．

例 7 a, a_1, a_2 を実数，c, c_1, c_2 を虚数部が0でない複素数とする．このとき，つぎの関係が成り立つ．

$$\frac{1}{x+a_1}*\frac{1}{x+a_2}=-\pi^2\delta(x+a_1+a_2), \tag{10.12}$$

$$\frac{1}{x+a}*\frac{1}{x+c}=\mp\frac{j}{2}\frac{1}{x+a+c},\quad \mathrm{Im}\, c\gtrless 0 \tag{10.13}$$

$$\frac{1}{x+c_1}*\frac{1}{x+c_2}=\begin{cases}\mp j\dfrac{1}{x+c_1+c_2}, & \sigma_1=\sigma_2\gtrless 0\\ 0, & \sigma_1\neq\sigma_2\end{cases} \tag{10.14}$$

ただし，$\sigma_1=\mathrm{sgn}(\mathrm{Im}\,c_1)$，$\sigma_2=\mathrm{sgn}(\mathrm{Im}\,c_2)$.

(10.12) を得るには，(10.8) に定理 16 を適用すればよい．(10.13) を得るには，さらに定理 31 を応用する．すなわち

$$\frac{1}{x+a}*\frac{1}{x+c}=\frac{1}{x}*\frac{1}{x+a+c}=\phi(x+a+c),$$

ただし

$$\frac{1}{x}*\left[\frac{1}{x}\right]_{\pm}=[\phi(x)]_{\pm},\quad \mathrm{Im}\,c\gtrless 0$$

である．ところが，(10.9) と見くらべると

$$\phi(x)=\mp\frac{j}{2}\frac{1}{x},\quad \mathrm{Im}\,c\gtrless 0$$

であることがわかる．したがって，けっきょく (10.13) が得られるのである．(10.14) も同様の操作で得られる (読者にまかせる).

例 8　上の (10.13), (10.14) について，定理 25〜28 が正しいことを確かめよ．

[定理 32]　超関数 $f_1(x), f_2(x)$ は，一方が上型，他方は下型とする．このとき

$$\mathrm{O.F.}\{f_1(x)*f_2(x)\}=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)\cdot f_2(x-t)dt \tag{10.15}$$

が成り立つ．

(証明)　$f_1(x)$ が上型，$f_2(x)$ が下型であるとしてもよい．このばあい

$$f_1(x)=[\varphi_1(x)]_+=\mathrm{H.F.}\{\varphi_1(z)\mathbf{1}_+(z)\},$$
$$f_2(x)=[\varphi_2(x)]_-=\mathrm{H.F.}\{\varphi_2(z)\mathbf{1}_-(z)\}$$

と書ける．ただし，$\varphi_1(z)$ は $0<\mathrm{Im}\,z<A_+$ で正則，$\varphi_2(z)$ は $A_-<\mathrm{Im}\,z<0$ で正則な解析関数である．

いま，定理 31 の $f(x)$，$[\varphi(x)]_-$ としてそれぞれ $f_1(x), f_2(x)$ を使うと

$$h(x)\equiv f_1(x)*f_2(x)=[\phi(x)]_- \tag{10.16}$$

が得られる．ただし

$$\phi(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)\varphi_2(z-t)dt$$

である．$f_1(t)$ の母関数を使ってこの定積分を表わすと

$$\phi(z)=\int_{C_+}\varphi_1(t)\varphi_2(z-t)dt \tag{10.17}$$

となる．積分路 C_+ は実数軸の上側を $-\infty$ から $+\infty$ までのびる直線である．明らかに，$\phi(z)$ は x 軸上でも正則である．(このことは定理 26 からもいえる.) したがって，

$$h(x)=[\psi(x)]_-=\psi(x) \tag{10.18}$$

である．（これは超関数としての等式である！）(10.18) の O.F. をとると

$$\text{O.F.}\{f_1(x)*f_2(x)\}=\psi(x) \tag{10.19}$$

が得られる．

つぎに，(10.15) の右辺を考える．変数 t の超関数として

$$\begin{aligned} f_1(t)\cdot f_2(x-t) &= [\varphi_1(t)]_+\cdot[\varphi_2(x-t)]_+ \qquad \because\ (7.4.1) \\ &= [\varphi_1(t)\varphi_2(x-t)]_+ \qquad \because\ 定義 12.3 \end{aligned}$$

の関係が成り立つから，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\cdot f_2(x-t)=\int_{C_+}\varphi_1(t)\varphi_2(x-t)dt \tag{10.20}$$

である．これと (10.17), (10.19) とを比べれば，(10.15) が得られる．▮

この定理は，共通の特異点をもたない２つの超関数に関する定理４に対応するものである．

§11. たたみこみの Fourier 変換

２つの超関数 $f_1(x)$, $f_2(x)$ のたたみこみ $f_1(x)*f_2(x)$ は超関数であるから，その Fourier 変換 $\mathfrak{F}\{f_1(x)*f_2(x)\}$ を考えることができる．これと $\mathfrak{F}f_1(x)$, $\mathfrak{F}f_2(x)$ との関係を調べよう．元来，たたみこみは２つの超関数の積の Fourier 変換に関連して導入されたものであった．したがって，たたみこみの Fourier 変換は２つの超関数の積に関連することが当然期待されるだろう．

$f_1(x)$, $f_2(x)$ を任意の超関数とするとそのたたみこみは必ずしも存在するとはかぎらないので，ここでは，存在の保証されている特別なばあいについて考えよう．

[定理 33] $f_1(x)$ を中央超関数，$f_2(x)$ を任意の超関数とすれば

$$\mathfrak{F}\{f_1(x)*f_2(x)\}=\mathfrak{F}f_1(x)\cdot\mathfrak{F}f_2(x) \tag{11.1}$$

が成り立つ．

（証明）　まず，定理 20 により $f_1(x)*f_2(x)$ が存在する．いま

$$\begin{aligned} &g_1(\xi)=\mathfrak{F}f_1(x)=\text{H.F. }G_1(\zeta), \\ &g_2(\xi)=\mathfrak{F}f_2(x)=\text{H.F. }G_2(\zeta), \\ &f_1(x)=\text{H.F.}F_1(z),\ f_2(x)=\text{H.F.}F_2(z), \\ &G_1(\zeta)=\mathfrak{F}F_1(z),\ G_2(\zeta)=\mathfrak{F}F_2(z) \end{aligned}$$

とおこう．定理 7.9 により $g_1(\xi)$ は整関数であるから，

$$g_1(\xi)=G_{1+}(\xi)-G_{1-}(\xi) \tag{11.2}$$

であって，$G_{1+}(\zeta)$, $G_{1-}(\zeta)$ は ξ 軸上でも正則な ζ の解析関数である．さて，たたみこみの定義により

$$f_1(x)*f_2(x)=\text{H.F.}\,H(z), \tag{11.3}$$

$$H(z)=\int_a^b f_1(t)F_2(z-t)dt \tag{11.4}$$

である．ただし，仮定により $f_1(x)$ は中央超関数であるから，$f_1(x)=0$ ($x\leqq a$, $x\geqq b$) と書けることを考慮した．

$H(z)$ の Fourier 変換は定義 5.1 によりつぎのように計算される．

$$\begin{aligned}K(\zeta)=\mathfrak{F}H(z)&=\left[\int_{l},\int_{r}\right]H(z)e^{-j\zeta z}dz\\&=\int_a^b f_1(t)dt\left[\int_{l},\int_{r}\right]F_2(z-t)e^{-j\zeta z}dz\\&=\int_a^b f_1(t)e^{-j\zeta t}dt\left[\int_{l},\int_{r}\right]F_2(z-t)e^{-j\zeta(z-t)}dz\\&=\int_a^b f_1(t)e^{-j\zeta t}dt\,G_2(\zeta)\qquad\because\ \text{定義 5.1}\\&=\{G_{1+}(\zeta)-G_{1-}(\zeta)\}G_2(\zeta)\qquad\because\ \text{定理 5.1}\\&=g_1(\zeta)G_2(\zeta).\end{aligned} \tag{11.5}$$

ただし，(11.2) を使う．$g_1(\zeta)$ は ζ の整関数である．(11.5) の H.F. をとれば

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}\{f_1(x)*f_2(x)\}&=\text{H.F.}\{g_1(\zeta)G_2(\zeta)\}\\&=g_1(\xi)\,\text{H.F.}\,G_2(\zeta)\\&=g_1(\xi)g_2(\xi)\end{aligned}$$

が得られるのである．∎

[定理 34]　$f_1(x)$, $f_2(x)$ がともに左(右)超関数ならば

$$\mathfrak{F}\{f_1(x)*f_2(x)\}=\mathfrak{F}f_1(x)\cdot\mathfrak{F}f_2(x) \tag{11.6}$$

が成り立つ．

（証明）　まず，$f_1(x)$, $f_2(x)$ がともに左超関数のばあいを考える．このとき，定理 7.8 によれば，$g_1(\xi)=\mathfrak{F}f_1(x)$, $g_2(\xi)=\mathfrak{F}f_2(x)$ はともに上超関数である．すなわち

$$g_i(\xi)=[\varphi_i(\xi)]_+\quad(i=1,2) \tag{11.7}$$

の形をもち，$\varphi_i(\zeta)$ は上半平面で正則な解析関数である．

さて，(11.3), (11.4) に対応して，いまのばあい

$$f_1(x)*f_2(x)=\text{H.F.}\,H(z), \tag{11.8}$$

$$H(z) = \int_{-\infty}^{a} f_1(t) F_2(z-t)dt \tag{11.9}$$

と書ける．ただし，$f_1(x)$ は仮定により左超関数であるから，$f_1(x)=0$ $(x \geqq a)$ とした．

(11.9) の Fourier 変換はつぎのように計算される．

$$\begin{aligned} K(\zeta) &= \mathcal{F}H(z) = \left[\int_{l}, \int_{r}\right] H(z)e^{-j\zeta z}dz \\ &= \int_{-\infty}^{a} f_1(t)dt \left[\int_{l}, \int_{r}\right] F_2(z-t)e^{-j\zeta z}dz \\ &= \int_{-\infty}^{a} f_1(t)e^{-j\zeta t}dt\ \varphi_2(\zeta)\mathbf{1}_+(\zeta) \\ &= \varphi_1(\zeta)\varphi_2(\zeta)\mathbf{1}_+(\zeta). \end{aligned}$$

これの H.F. をとれば $[\varphi_1(\xi)]_+ \cdot [\varphi_2(\xi)]_+$ となり，定理の前半が得られる．右超関数のばあいについても同様に証明できる．■

[定理 35]（Titchmarsh の定理） $f_1(x), f_2(x)$ はともに 左(右)超関数であるとする．このとき，もし

$$f_1(x) * f_2(x) = 0 \tag{11.10}$$

ならば，$f_1(x)=0$ または $f_2(x)=0$ である．

（証明） $\mathcal{F}f_1(x)=g_1(\xi)$, $\mathcal{F}f_2(x)=g_2(\xi)$ が存在するばあいについて証明する．(11.10) の Fourier 変換をとると

$$g_1(\xi) \cdot g_2(\xi) = 0. \tag{11.11}$$

$f_1(x), f_2(x)$ が右超関数ならば，$g_1(\xi), g_2(\xi)$ は下超関数である（定理 7.8）．すなわち

$$g_1(\xi) = [\varphi_1(\xi)]_-,\ g_2(\xi) = [\varphi_2(\xi)]_- \tag{11.12}$$

と書けるような下半平面で正則な解析関数 $\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)$ が存在する．そして (11.11) は

$$[\varphi_1(\xi)]_- \cdot [\varphi_2(\xi)]_- = [\varphi_1(\xi)\varphi_2(\xi)]_- = 0$$

となる．これから，$\varphi_1(\zeta)\varphi_2(\zeta)=0$，したがって

$$\varphi_1(\zeta) = 0 \quad \text{または} \quad \varphi_2(\zeta) = 0$$

が ξ 軸の近傍 ($\mathrm{Im}\,\zeta<0$) で成り立つことがわかる．これは

$$g_1(\xi) = 0 \quad \text{または} \quad g_2(\xi) = 0 \tag{11.13}$$

を意味する．これの $\mathcal{F}^{-1}$ をとると定理の結論が得られる．$f_1(x), f_2(x)$ が左超関数のばあいも同様である．■

注意　(11.11) からただちに (11.13) を結論することはできない！　たとえば $g_1(\xi)=\xi$, $g_2(\xi)=\delta(\xi)$ とすると $g_1(\xi)\cdot g_2(\xi)=0$ である．$g_1(\xi)$, $g_2(\xi)$ がともに上(下)超関数であることが本質的に重要である．

§12.　積の Fourier 変換

定理 34 の Fourier 変換を考え，$\mathfrak{F}f_1(x)$, $\mathfrak{F}f_2(x)$ をあらためて $f_1(x)$, $f_2(x)$ と書くことにすると，ただちにつぎの定理が得られる．

[定理 36]　$f_1(x)$, $f_2(x)$ がともに上(下)超関数で，その Fourier 変換が右(左)超関数になるようなものであれば

$$\mathfrak{F}\{f_1(x)\cdot f_2(x)\}=\mathfrak{F}f_1(x)*\mathfrak{F}f_2(x) \tag{12.1}$$

が成り立つ．

$f_1(x)$, $f_2(x)$ がふつうの関数のばあいには，(12.1) はよく知られた結果である．超関数のばあいでも，われわれはすでにつぎの結果を知っている．

[定理 37]　$f_1(x)$, $f_2(x)$ が共通の特異点をもたないならば

$$\mathfrak{F}\{f_1(x)\cdot f_2(x)\}=\mathfrak{F}f_1(x)*\mathfrak{F}f_2(x) \tag{12.2}$$

が成り立つ．ただし，右辺が存在するものとする．

実は，これは (3.12) 式を書きかえたものである．そして，超関数のたたみこみを導入するきっかけをつくったのであった．

$g_1(\xi)=\mathfrak{F}f_1(x)$, $g_2(\xi)=\mathfrak{F}f_2(x)$ とすると，定理 36 では $g_1(\xi)$, $g_2(\xi)$ はともに右(左)超関数である．しかし，定理 37 では，$g_1(\xi)$, $g_2(\xi)$ の性質についてそのようなはっきりしたことはいえないのである．定理 37 にただし書きがつくのはそのためである．

定理 33 と定理 34 は一括して

“たたみこみの Fourier 変換は Fourier 変換の積に等しい”

と言い表わすことができる．また，定理 36 と定理 37 は

“積の Fourier 変換は Fourier 変換のたたみこみに等しい”

と表現される．このように，積とたたみこみは Fourier 変換によって互いに他に移りかわるので，たたみこみの演算が積と類似の性質をもつことがなっとくされるであろう．

最後に，積の Fourier 変換の応用例としてつぎの定理を与えよう．

[定理 38] $g(\xi)=\mathfrak{F}f(x)$ が標準母関数 $\tilde{G}(\zeta)$ をもつならば

$$\mathfrak{F}\{f(x)\cdot H(\pm x)\}=\mp[\tilde{G}(\xi)]_{\mp} \tag{12.3}$$

である．ただし，$f(x)$ は $x=0$ で正則とする．

（証明）$f(x)$ は $x=0$ で正則であり，$H(\pm x)$ は $x\neq 0$ で正則であるから積 $f(x)\cdot H(\pm x)$ が存在する．その Fourier 変換は定理 37 によりつぎのようにたたみこみを使って表わされる．

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}\{f(x)\cdot H(\pm x)\} &= \mathfrak{F}f(x)*\mathfrak{F}H(\pm x)\\ &= g(\xi)*\{\mp[\delta(\xi)]_{\mp}\}.\end{aligned}$$

ただし，(7.3.14) を使う．ここで定理 7 を応用すると，ただちに (12.3) が得られる．∎

この定理を使えば，たとえば $\mathfrak{F}\{(x+c)^{-1}H(x)\}$（$c$ は任意の複素数）の形の Fourier 変換が比較的簡単に求められる．

§13. 超関数の値と無限主値積分

$$\mathfrak{F}\{f_1(x)\cdot f_2(x)\}=\mathfrak{F}f_1(x)*\mathfrak{F}f_2(x) \tag{13.1}$$

の関係式は，$f_1(x), f_2(x)$ がふつうの関数のばあいには

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(x)e^{-j\xi x}dx=\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)g_2(\xi-t)dt \tag{13.2}$$

と具体的に表わされる．もちろん，$g_1(\xi)=\mathfrak{F}f_1(x)$, $g_2(\xi)=\mathfrak{F}f_2(x)$ である．そして (13.2) の両辺は ξ の ふつうの関数である．ところが，$f_1(x), f_2(x)$ が超関数のばあいには，(13.1) の両辺は超関数であって，なんらかの数値を表わすものではない．一般に，**超関数** $f(x)$ の‘表わす’数値を求めるには，まず $f(x)$ を**ふつうの関数**に見直すことが必要である．すなわち O.F. $f(x)$ を求めなければならない．それゆえ，(13.1) の両辺の O.F. をとることによってはじめて (13.2) に相当するものが得られるのである．

(13.2) の両辺には無限積分 $\int_{-\infty}^{\infty}$ が現われるが，(13.1) の O.F. をとって得られる関係では，以下に述べるように，(10.2.11) で定義した無限主値積分 $\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty}$ が現われ，したがって無限積分の収束の条件がはるかに緩くなる．

さて，つぎの定理が成り立つ．

[定理 39] $g(\xi)=\mathfrak{F}f(x)$ とすれば

$$\mathrm{O.F.}\,g(\xi)=\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\xi x}dx, \tag{13.3}$$

とくに

$$\text{O.F.}\, g(0) = \mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \tag{13.4}$$

が成り立つ．ただし，右辺が存在するものとする．

（証明） $f(x)=\text{H.F.}F(z)$, $g(\xi)=\text{H.F.}G(\zeta)$ とすれば，定理5.1により

$$G(\zeta) = \mathcal{F}F(z) = \left[\int_{-\infty}^{c}, \int_{\infty}^{c}\right] f(x)e^{-2\pi i\zeta x}dx \tag{13.5}$$

である．また，定義2.3によれば

$$\text{O.F.}\, g(\xi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\{G_+(\xi+i\varepsilon)-G_-(\xi-i\varepsilon)\} \tag{13.6}$$

である．

まず(13.4)，すなわち$\xi=0$のばあいを証明しよう．簡単のために$f(x)$は$x=0$で正則であると仮定すれば，$c=0$ととることができる．（この仮定は容易にとり除くことができる．たとえば，$f(x)=f(x)H(x;-a,a)+f_1(x)$のように分解して考えればよい．つまり，第1項は中央超関数であるから，その Fourier 変換は整関数，したがって(13.3)は確かに成り立つ．また，第2項$f_1(x)$は$x=0$で正則である．）そうすると(13.5)により

$$\begin{aligned} G_+(i\varepsilon)-G_-(-i\varepsilon) &= \int_{-\infty}^{c} f(x)e^{2\pi\varepsilon x}dx + \int_{c}^{\infty} f(x)e^{-2\pi\varepsilon x}dx \\ &= \int_{0}^{\infty}\{f(x)+f(-x)\}e^{-2\pi\varepsilon x}dx. \end{aligned} \tag{13.7}$$

さて，仮定により

$$\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{\infty}\{f(x)+f(-x)\}dx$$

が存在する．ところが，一般に，$\int_0^\infty F(x)dx$ が存在するばあいには，$\int_0^\infty F(x)e^{-\varepsilon x}dx$ $(\varepsilon>0)$ が存在して

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\infty F(x)e^{-\varepsilon x}dx = \int_0^\infty F(x)dx$$

が成り立つことが証明される．（ベキ級数に関する Abel の定理に類似の定理である．たとえば，E.C. Titchmasrh: The theory of functions, 2nd ed. (Oxford Univ. Press, 1939), p. 26を見よ．）そこで，この$F(x)$として$f(x)+f(-x)$を使えば，(13.7)からただちに

$$\text{O.F.}g(0) = \lim_{\varepsilon\to 0}\{G_+(i\varepsilon)-G_-(-i\varepsilon)\} = \mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

が得られるのである．

(13.3)を証明するには

$$f(x) \equiv f_1(x)e^{-jkx} \tag{13.8}$$

とおいて，これに (13.4) を適用すればよい．このとき

$$g(\xi) = \mathfrak{F}\{f_1(x)e^{-jkx}\} = g_1(\xi+k),$$

ただし

$$g_1(\xi) = \mathfrak{F}f_1(x)$$

である．したがって

$$\text{O.F.}\,g_1(k) = \text{O.F.}\,g(0) = \text{P}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$
$$= \text{P}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)e^{-jkx}dx.$$

ここで $f_1 \to f$, $g_1 \to g$, $k \to \xi$ とおきかえれば (13.3) が得られる．∎

注意　(2.4.3) 式すなわち

$$\text{O.F.}\,f(x)_{\text{H.F.}} = \frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\} \tag{13.9}$$

の関係に注意せよ．また $f(x)$ がふつうの関数のばあいには，(13.3) は Fourier 変換の定義

$$\mathfrak{F}f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\xi x}dx \tag{13.10}$$

と一致する．ただし，無限主値積分が存在するばあいに拡張されていることに注意してほしい．

例 9　$f(x)$ が奇超関数のばあいには，定理 5.5 により，$g(\xi)=\mathfrak{F}f(x)$ も奇超関数である．このとき，O.F. $g(0)=0$ であるから，(13.4) の関係はたしかに成り立っている．

§14.　Parseval の定理

2 つの超関数の積の Fourier 変換に対して定理 39 を適用すれば，つぎの Parseval の定理が得られる．

[定理 40]（Parseval の定理）　超関数 $f_1(x)$, $f_2(x)$ の Fourier 変換を $g_1(\xi)$, $g_2(\xi)$ とすれば

$$\text{P}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\cdot f_2(x)dx = \text{P}\int_{-\infty}^{\infty} g_1(\xi)\cdot g_2(-\xi)d\xi \tag{14.1}$$

が成り立つ．ただし，超関数どうしの積 $f_1(x)\cdot f_2(x)$, $g_1(\xi)\cdot g_2(-\xi)$ が存在し，かつ両辺の積分が存在するものとする．

（証明）　仮定により

$$\mathfrak{F}\{f_1(x)\cdot f_2(x)\} = g_1(\xi)*g_2(\xi) \tag{14.2}$$

が成り立つ．この O.F. をとる：

$$\text{O.F.}\mathcal{F}\{f_1(x)\cdot f_2(x)\} = \text{O.F.}\{g_1(\xi)*g_2(\xi)\}. \tag{14.3}$$

いま (13.4) の $f(x)$ として $f_1(x)\cdot f_2(x)$ をとると

$$\begin{aligned} \text{P}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\cdot f_2(x)dx &= [\text{O.F.}\mathcal{F}\{f_1(x)\cdot f_2(x)\}]_{\xi=0} \\ &= [\text{O.F.}\{g_1(\xi)*g_2(\xi)\}]_{\xi=0}. \end{aligned} \tag{14.4}$$

ただし，(14.3) を使う．さて，$g_1(\xi)\cdot g_2(-\xi)$ が存在するのは

（i） $g_1(\xi), g_2(-\xi)$ に共通の特異点がないばあい

（ii） $g_1(\xi), g_2(-\xi)$ がともに上(下)超関数のばあい

のいずれかである．

ところが，どちらのばあいでも

$$\text{O.F.}\{g_1(\xi)*g_2(\xi)\} = \text{P}\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)\cdot g_2(\xi-t)dt \tag{14.5}$$

が成り立つのである．すなわち，（i）のばあいは定理 4 として，また（ii）のばあいは定理 32 としてすでに知られている．(後で述べるように，たたみこみの定義に現われる 無限積分 $\int_{-\infty}^{\infty}$ はすべて無限主値積分 $\text{P}\int_{-\infty}^{\infty}$ でおきかえることができる．(14.5) では，このような修正がほどこしてある.）そこで，(14.5) の ξ を 0 とおいて (14.4) に代入すると，ただちに (14.1) が得られる．∎

例 10　(14.1) 式で $f_2(x)=1$ とおけば，$g_2(\xi)=\delta(\xi)$，したがって

$$g_1(0) = \text{P}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)dx$$

が導かれる．これは (13.4) の特別なばあいである．

例 11　$I = \text{pf}\int_a^b (x-a)^\alpha (b-x)^\beta dx$

はつぎのように計算される．

$$\begin{aligned} f_1(x) &= |x-a|^\alpha H(x-a), \\ f_2(x) &= |b-x|^\beta H(b-x) \end{aligned}$$

とおけば，

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\cdot f_2(x)dx.$$

さて Fourier 変換の表により

$$\mathcal{F}|x|^\alpha H(x) = \Gamma(\alpha+1)|2\pi\xi|^{-(\alpha+1)}\exp\left[-(\alpha+1)\frac{\pi}{2} i \operatorname{sgn}\xi\right]. \tag{14.6}$$

これから

$$\begin{aligned} g_1(\xi) &= \mathcal{F} f_1(x) \\ &= e^{-j a\xi}\Gamma(\alpha+1)|2\pi\xi|^{-(\alpha+1)}\exp\left[-(\alpha+1)\frac{\pi}{2} i \operatorname{sgn}\xi\right], \end{aligned}$$

$$g_2(-\xi)=\mathfrak{F}f_2(-x)$$
$$=e^{jb\xi}\Gamma(\beta+1)|2\pi\xi|^{-(\beta+1)}\exp\left[-(\beta+1)\frac{\pi}{2}i\operatorname{sgn}\xi\right].$$
$$\therefore\quad g_1(\xi)\cdot g_2(-\xi)$$
$$=e^{-j(a-b)\xi}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)|2\pi\xi|^{-(\alpha+\beta+2)}\exp\left[-(\alpha+\beta+2)\frac{\pi}{2}i\operatorname{sgn}\xi\right].$$

Parseval の定理により

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}g_1(\xi)\cdot g_2(-\xi)d\xi=[\mathfrak{F}\{g_1(\xi)\cdot g_2(-\xi)\}]_{x=0}.$$

(14.6) の Fourier 変換をとると

$$\mathfrak{F}\left\{|2\pi\xi|^{-(\alpha+1)}\exp\left[-(\alpha+1)\frac{\pi}{2}i\operatorname{sgn}\xi\right]\right\}=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}|x|^{\alpha}H(-x). \tag{14.7}$$

$\mathfrak{F}\{g_1(\xi)\cdot g_2(-\xi)\}$ は (14.7) の左辺と同じ型であるから，簡単な計算で

$$I=\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}(b-a)^{\alpha+\beta+1} \tag{14.8}$$

が得られる．これは前に別の方法で求めた (12.5.14) の結果と一致する．

Fourier 変換の表で

$$\mathfrak{F}|x|^{\alpha}H(x)=\Gamma(\alpha+1)[(j\xi)^{-(\alpha+1)}]_-$$

を使うと，以上の計算はもうすこし簡単になる（読者にまかせる）．

§15. ま と め

ふつうの関数についてよく知られている‘たたみこみ’という演算を，超関数のばあいにも合理的に定義することができた．たたみこみの演算が積と類似の性格をもつことを見てきた．たたみこみの計算を行なう際に役立つ基本的な定理をいくつか導いた．また，たたみこみが存在するための十分条件として，簡単でしかも比較的に適用範囲の大きいものを見出した．左(右)超関数，上(下)型超関数という制限をつけると，たたみこみについてもいろいろ立ち入った議論ができる．とくに重要な事実は，“積の Fourier 変換は Fourier 変換のたたみこみに等しい”，“たたみこみの Fourier 変換は Fourier 変換の積に等しい” ということが超関数についても成り立つことである．最後に，Parseval の定理を超関数のばあいに拡張した．

14 周期超関数のたたみこみ

§1. は じ め に

前章では，超関数のたたみこみについて一般論を展開した．これを基にして，周期超関数と任意の超関数のたたみこみについて調べるのがこの章の目的である．周期超関数は‘標準母関数’をもつこと，しかも標準母関数がその周期超関数の Fourier 級数にほかならないことをわれわれは見てきた．そして，標準母関数の定義には‘無限主値積分’が重要な役割を演じたのである．そこで，周期超関数のたたみこみを議論するのにも，‘たたみこみ’の定義に現われる無限積分を無限主値積分に修正しておくのが便利であると想像される．実際，このような修正を施こすと，たたみこみの適用範囲がいちじるしくひろがるのである．

§2. たたみこみの定義の拡張

2つの超関数 $f_1(x), f_2(x)$ のたたみこみは

$$f_1(x)*f_2(x) \overset{\text{def}}{=} \text{H.F. } H(z), \tag{2.1}$$

$$H(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)F_2(z-t)dt \tag{2.2}$$

で定義される(定義 13.1)．ただし，$f_2(x)=\text{H.F. } F_2(z)$ である．このように，定義の上では $f_1(x)$ と $f_2(x)$ とは対称的に現われていない．しかし，$f_1(x)*f_2(x)$, $f_2(x)*f_1(x)$ が存在するばあいには，交換法則：$f_1(x)*f_2(x)=f_2(x)*f_1(x)$ が成り立ち (定理 13.1)，結果的にたたみこみの対称性が成り立つのであった．

さて，たたみこみの定義には (2.2) のように無限積分が現われるが，これを**無限主値積分**としてもよいことをつぎに示そう．これによって，たたみこみの演算が可能な超関数の範囲が大幅にひろげられることになるだろう．

そのために，まず，つぎの予備定理を証明しておこう．

[定理 1] $f_1(x)=\text{H.F. } F_1(z), f_2(x)=\text{H.F. } F_2(z)$ とすれば

$$\int_a^b f_1(t)F_2(z-t)dt \cong \int_{x-b}^{x-a} f_2(t)F_1(z-t)dt \tag{2.3}$$

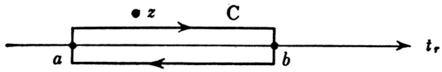


図 1

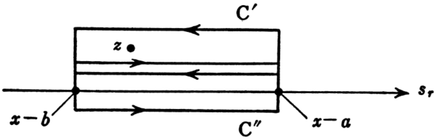


図 2

が成り立つ．ただし，a, b は任意の実数である．

（証明）　超関数の定積分の定義により

$$\int_a^b f_1(t)F_2(z-t)dt = \int_C F_1(t)F_2(z-t)dt. \tag{2.4}$$

ただし，積分路Cは t 平面上で区間 (a, b) を上下からはさみ，点 $t=z$ を含まない薄べったい長方形である．（図1，矢印に注意！）いま

$$z-t = s,\ \ t = z-s$$

とおいて，積分変数を t から s にかえると，(2.4) の右辺は

$$\int_C = \int_{C'} F_1(z-s)F_2(s)ds$$

となる．ただし，C′ は図2に示すような積分路である．（矢印に注意！）C′ は十分薄べったくとってあるから，s 平面の実数軸にはひっかからない．そこで，図のように，区間 $(x-b, x-a)$ を含み，C′ に接するような長方形 C″ をつくる．そうすると，積分路 C′ は

$$C' = (C'+C'')-C''$$

のように分解される．まず，

$$\int_{C'+C''} F_1(z-s)F_2(s)ds = \varphi(z) \tag{2.5}$$

は z の解析関数で x 軸上で正則である．なぜならば，C′ の上辺（C'_+ と書く）は Cの下辺（C_- と書く）に対応し，そこでは $F_1(z-s)$ として $F_{1-}(z-s)$ をとるべきである．ところが，$F_{1-}(z)$ は $\mathrm{Im}\, z<0$ で正則な解析関数であるから，$F_{1-}(z-s)$ は，C'_+ 上の s に対しては，z の解析関数で，$\mathrm{Im}\, z=0$ すなわち $z=x$ に対しても正則である．したがって，$\int_{C'_+} F_1(z-s)F_2(s)ds$ は x 軸上で正則な z の解析関数である．また，C″ 上では，C'_- に接続することから，$F_1(z-s)$ と

しては $F_{1+}(z-s)$ をとるべきである．とくに C''_- 上では $\mathrm{Im}\, s<0$ であるから，$F_{1+}(z-s)$ は $\mathrm{Im}\, z=0$ でも正則な z の解析関数となり，したがってこれを積分した $\int_{C''_-}F_1(z-s)F_2(s)ds$ は x 軸上で正則な解析関数であることがわかる．けっきょく，(2.5) の $\varphi(z)$ は x 軸上で正則な z の解析関数である．(図 1, 2 は $\mathrm{Im}\, z>0$ のばあいを示し，以上の議論もそのばあいについて行なった．$\mathrm{Im}\, z<0$ のばあいについても同様の議論ができて，$\int_{C'+C''}$ として同じ解析関数 $\varphi(z)$ が得られる．これを確かめることを読者におすすめする.)

つぎに，積分路 $-C''$ は図 1 の積分路 C と同じ性格のものである．したがって，(2.4) に相当して

$$\int_{-C''}F_1(z-s)F_2(s)ds=\int_{x-b}^{x-a}f_2(s)F_1(z-s)ds \qquad (2.6)$$

が得られる．(2.4), (2.5), (2.6) を

$$\int_C=\int_{C'+C''}+\int_{-C''}$$

の関係式に代入し，$\varphi(z)\cong 0$ (≅は**同等**の記号！) を考慮すると，(2.3) が得られる．▮

さて，たたみこみの定義で，(2.2) の代りに

$$H(z)=\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)F_2(z-t)dt \qquad (2.7)$$

を使えばどうなるだろうか．このばあい，**無限主値積分の意味でのたたみこみ**，あるいは簡単に**Pたたみこみ**ということにしよう．そうすると，つぎの定理が成り立つ．

[定理 2] 無限主値積分の意味で $f_1(x)*f_2(x)$, $f_2(x)*f_1(x)$ のどちらか一方が存在するものとする．このとき，他方も存在して交換法則:

$$f_1(x)*f_2(x)=f_2(x)*f_1(x) \qquad (2.8)$$

が成り立つための必要十分条件は，任意の実数 a に対して

$$\lim_{R\to\infty}\int_R^{R+a}f_1(t)F_2(z-t)dt\cong 0 \qquad (2.9)$$

が成り立つことである．

(証明) 無限主値積分の意味でのたたみこみの定義を念頭において

$$H(z,R)=\int_{-R}^{R}f_1(t)F_2(z-t)dt, \qquad (2.10)$$

$$K(z,R)=\int_{-R}^{R}f_2(t)F_1(z-t)dt \qquad (2.11)$$

を考える．定理1により

$$K(z,R)\cong\int_{x-R}^{x+R}f_1(t)F_2(z-t)dt$$

である．ところが

$$\int_{x-R}^{x+R}=\int_{-(R-x)}^{R-x}+\int_{R-x}^{R+x}=\int_{-R'}^{R'}+\int_{R'}^{R'+2x}$$

と書ける．ただし，$R'=R-x$ とおく．したがって

$$K(z,R)\cong H(z,R')+\int_{R'}^{R'+2x}f_1(t)F_2(z-t)dt \tag{2.12}$$

である．xを一定に保つとき，$R\to\infty$ は $R'\to\infty$ に対応する．

いま，もし $f_1(x)*f_2(x)$, $f_2(x)*f_1(x)$ の一方，たとえば $f_1(x)*f_2(x)$ が無限主値積分の意味で存在するものとすれば，

$$\lim_{R\to\infty}H(z,R)=H(z) \tag{2.13}$$

が存在して，$f_1(x)*f_2(x)=\mathrm{H.F.}\ H(z)$ になる．

さて，もしさらに (2.9) が成り立つならば，(2.12) から，$\lim_{R\uparrow\infty}K(z,R)$ が存在することになり，しかもそれは (2.13) に等しい．すなわち，$f_2(x)*f_1(x)$ が存在して，$f_1(x)*f_2(x)$ に等しいということになる．つまり，(2.9) はそのための十分条件である．

つぎに，$f_2(x)*f_1(x)$ が存在して $f_1(x)*f_2(x)$ に等しいとすれば，(2.12) から，任意のxに対して $R'\to\infty$ のとき，右辺の第2項が0と同等になることがわかる．すなわち，(2.9) はその前提が成り立つための必要条件である．▮

注意　もとの意味でたたみこみが存在するためには，(2.2) の無限積分が存在しなければならない．とくに，$t\to\infty$ で積分可能であるというのは，R, R' が独立に $R\to\infty$, $R'\to\infty$ のとき $\int_R^{R'}\to 0$ が成り立つということである．このばあい，(2.9) の条件はもちろん満足される．すなわち，条件 (2.9) は，たたみこみが無限主値積分の意味でしか定義されないときに効力を発揮する．（下の例3を見よ．）もとの意味で $f_1(x)*f_2(x)$ が存在すれば，自動的に (2.9) の条件が満足され，したがって $f_2(x)*f_1(x)$ も存在して，交換法則が成り立つのである．

[定理 3]　$g(\xi)=\mathcal{F}f(x)$ とすれば，無限主値積分の意味で

$$f(x)*e^{jkx}=g(k)e^{jkx}, \tag{2.14}$$

$$g(k)=\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-jkx}dx \tag{2.15}$$

が成り立つ．ここで $g(k)=\{\mathrm{O.F.}\ g(\xi)\}_{\xi=k}$ である．

（証明）　$e^{jkx}=\mathrm{H.F.}\ e^{jkz}\mathbf{1}_+(z)$ であるから，$f(x)*e^{jkx}=\mathrm{H.F.}\ H(z)$ とすれば

$$H(z) = \mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{jk(z-t)}1_{+}(z-t)dt$$
$$= \mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-jkt}dt \cdot e^{jkz}1_{+}(z)$$

である．これの H.F. をとれば，ただちに (2.14) が得られる．なお，(2.15) は定理 13.39 の (13.13.3) 式にほかならない．■

$g(k)$ が存在しないばあいには，むろん $f(x)*e^{jkx}$ は存在しない！

例 1　無限主値積分の意味で

$$f(x)*1 = \mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = g(0) \tag{2.16}$$

が成り立つ．ただし $g(\xi)=\mathfrak{F}f(x)$ で，$\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ が存在するものとする．この結果は定理 3 の特別なばあいで，$k=0$ とおいて得られる．とくに，$f(x)$ が奇超関数のばあいには，いつでも $f(x)*1=0$ である．

例 2　(i)　$x*1=0$,　$1*x=?$　　(ii)　$\mathrm{sgn}x*1=0$,　$1*\mathrm{sgn}x=2x$.

(i)　x は奇超関数であるから，例 1 により，$x*1=0$ である．しかし，$1*x$ は存在しない．したがって，もちろん交換法則は成り立たない．(ii)は，たたみこみが存在しても交換法則が成り立たない例である．(それぞれ定義にしたがって計算してみよ．)

例 3

$$1*\frac{1}{x} = \frac{1}{x}*1 = 0. \tag{2.17}$$

$f_1(x)=1/x$, $f_2(x)=1$ とすれば，例 1 により $f_1(x)*1$ は存在して 0 である．つぎに，定理 2 の条件 (2.9) を調べよう．

$$\int_R^{R+a} f_1(t)F_2(z-t)dt = \int_R^{R+a} \frac{1}{t}1(z-t)dt$$
$$= \int_R^{R+a} \frac{1}{t}1(z)dt = \left(\log\frac{R+a}{R}\right)1(z)$$
$$\to 0, \qquad R\to\infty.$$

したがって，定理 2 により交換法則が成り立ち，(2.17) の結果が得られる．

このばあい，たたみこみに対するもとの定義では，$1*1/x$, $1/x*1$ がいずれも存在しないことは明らかであろう．

§3.　Poisson の和公式

超関数 $f_1(x)$, $f_2(x)$ の Fourier 変換を $g_1(\xi)$, $g_2(\xi)$ とすると

$$\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\cdot f_2(x)dx = \mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} g_1(\xi)\cdot g_2(-\xi)d\xi \tag{3.1}$$

という等式が成り立つ．すなわち Parseval の定理（定理 13.40）である．いま，$f_2(x)$ としてとくに **δ 関数列** $\delta(x,l)$ をとればどうなるかを考えてみよう．δ 関

数列というのは

$$\delta(x,l) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-nl) \tag{3.2}$$

で定義され（定義 10.7），等間隔 l でならんだ無限個の δ 関数の列を表わすものである．その Fourier 変換は

$$\mathcal{F}\delta(x,l) = \frac{1}{l}\delta\left(\xi, \frac{1}{l}\right) \tag{3.3}$$

で与えられ（定理 10.14），これもまた δ 関数列である．

いま，$f_1(x)$ として任意の超関数 $f(x)$ をとる．ただし，$f(x)\cdot\delta(x,l)$ の積が存在するようなものとして，$f(x)$ は $x=ml$（m=整数）で正則であると仮定しておこう．こうして (3.1) の左辺を考える：

$$\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\delta(x,l)dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\cdot\delta(x,l)dx. \tag{3.4}$$

さて

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{R} f(x)\cdot\delta(x,l)\,dx &= \int_{-R}^{R} f(x)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-nl)dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\cdot\delta(x-nl)dx \\ &= \sum_{n=-N}^{N} f(nl), \quad N<R/l<N+1 \end{aligned} \tag{3.5}$$

である．ここで δ 関数の性質が使ってある．また R は R/l が整数でないようにとってある．

$R\to\infty$ が $N\to\infty$ に対応することから，(3.4) の存在が (3.5) の右辺の無限級数（$N\to\infty$ としたときの）の存在と同等であることは明らかであろう．この無限級数は n について $-\infty$ から ∞ までの和を考え，しかも n の正負の値を対称的にとるものであるから，ちょうど無限主値積分と類似の性格をもっている．そこで，これを無限主値級数とよび，$\mathrm{P}\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ のような記号で表わすことにしよう．以上を定義と定理としてまとめておく．

〔定義 1〕 無限級数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n$ に対して

$$\mathrm{P}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \overset{\text{def}}{=} \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} c_n$$

をその**主値**という．また $\mathrm{P}\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ の型の無限級数を**無限主値級数**とよぶ．

[定理 4] $f(x)$ は $x=pl$（p=整数）で正則な超関数とする．このとき

$$\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\delta(x,l)dx = \mathrm{P}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nl) \tag{3.6}$$

が成り立つ．ただし，両辺のどちらか一方が存在するものとする．

この定理と Parseval の定理を使えば，容易につぎの Poisson の和公式が得られる．

[定理 5]　(Poisson の和公式)　$f(x)$, $g(\xi)=\mathcal{F}f(x)$ はそれぞれ $x=ml$, $\xi=n/l$ (m, n=整数) で O.F. $f(x)$, O.F. $g(\xi)$ が値をもつような超関数とする．このとき

$$\mathrm{P}\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(ml) = \frac{1}{l}\mathrm{P}\sum_{n=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{n}{l}\right) \tag{3.7}$$

が成り立つ．ただし，両辺の無限主値級数が存在するものとする．

(証明)　まず，$f(x)$, $g(\xi)$ がそれぞれ $x=ml$, $\xi=n/l$ で正則のばあいを考えよう．このばあい，(3.1) の $f_1(x)$, $f_2(x)$ としてそれぞれ $f(x)$, $\delta(x,l)$ をとれば

$$\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\delta(x,l)\,dx = \frac{1}{l}\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\cdot\delta\left(\xi,\frac{1}{l}\right)d\xi \tag{3.8}$$

が得られる．ただし，(3.3) の関係を使う．ここで両辺に定理 4 の (3.6) 式を適用すれば，ただちに (3.7) が得られる．

つぎに，$f(x)$ が $x=pl$ (p=整数) を特異点とするばあいを考える．このばあい，(3.1) の $f_2(x)$ として

$$f_2(x) = \delta(x,l)-\delta(x-pl) \tag{3.9}$$

をとると，$f_2(x)$ は $x=pl$ で正則であるから，$f(x)\cdot f_2(x)$ はたしかに存在する．そして

$$g_2(\xi) = \mathcal{F}f_2(x) = \frac{1}{l}\delta\left(\xi,\frac{1}{l}\right)-e^{-jpl\xi} \tag{3.10}$$

である．さて (3.1) の左辺は

$$\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot f_2(x)dx = \mathrm{P}\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' f(ml) \tag{3.11}$$

となる (記号 $'$ は $m=p$ の項を除くことを意味する)．一方，(3.1) の右辺は

$$\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\cdot g_2(-\xi)d\xi = \frac{1}{l}\mathrm{P}\sum_{n=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{n}{l}\right)-\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{jpl\xi}d\xi \tag{3.12}$$

となる．ところが，定理 13.39 の (13.13.3) 式により (f と g の役割をかえて)

$$\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{jpl\xi}d\xi = \mathrm{O.F.}f(pl) \equiv f(pl) \tag{3.13}$$

である．（$f(pl)$ というのは O.F.$f(pl)$ のことである！）そこで，(3.11) を (3.12) に等しいとおき，(3.13) の項を左辺に移すと，けっきょく (3.7) が得られる．$f(x)$, $g(\xi)$ がそれぞれ $x=ml$, $\xi=n/l$（$m,n=$整数）の複数個の点で特異性をもつばあいも上と同様に処理できる．∎

注意　Lighthill の著書では，Poisson の和公式の証明は $f(x)$ が**良い関数**のばあいについて与えられている．'良い関数' というのは，いたるところ何回でも微分可能であり，かつすべての N に対して関数自身とそのすべての導関数が $|x|\to\infty$ で $O(|x|^{-N})$ であるような関数のことである．したがって，これは x 軸上で正則な解析関数にほぼ相当する．Lighthill は Poisson の和公式が成り立つための十分条件として，"$f(x)$ が $(-\infty,\infty)$ で連続かつ有界変動で，$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$ が収束する" という条件があると述べているが，証明の方針を示唆するだけで具体的な証明は与えていない．上に導いた定理 5 では，$f(x)$ に対する条件が大幅に緩和されていることは明らかであろう．実際，$f(x)$ は不連続であってもよい．もし $x=ml$ で不連続ならば，$f(ml)$ として $\{f(ml+0)+f(ml-0)\}/2$ をとればよいのである．和公式の成り立つための実質的な条件としては，単に両辺の無限主値級数が存在することだけであって，ふつうそれはなんらかの方法で簡単に確かめられる．なお，両辺の一方が存在するからといって他方は必ずしも存在しないことを忘れてはならない．

例 4　$f(x)=e^{-ax^2}$,　$a>0$

これは '良い関数' の例である．(5.5.1) により

$$g(\xi)=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\pi^2\xi^2/a}.$$

このばあい，(3.7) の両辺の無限級数は主値をとるまでもなく収束する．形を整えるために $a=\lambda^2$, $l=1$ とおくと，ただちにつぎの等式が得られる．

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-m^2\lambda^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{\lambda}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-n^2\pi^2/\lambda^2}. \tag{3.14}$$

$\lambda=\sqrt{\pi}$ に対しては両辺の無限級数はまったく同じになる．

$\sum e^{-m^2\lambda^2}$ を λ の関数と考えたとき，その値を数値的に計算するには，$\lambda<\sqrt{\pi}$ のばあいは右辺を，$\lambda>\sqrt{\pi}$ のばあいは左辺を使えば収束性の点で非常に便利である．

例 5　$f(x)=e^{-x^2+jkx}$,　$k=$実数

$\mathcal{F}\{e^{jkx}f(x)\}=g(\xi-k)$, $g(\xi)=\mathcal{F}f(x)$ の関係を使えば，例 4 の $f(x)$, $g(\xi)$ の表式から，$a=1$ とおいて

$$g(\xi)=\sqrt{\pi}\,e^{-\pi^2(\xi-k)^2}$$

が得られる．したがって，(3.7) は

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-m^2l^2+jmlk}=\frac{\sqrt{\pi}}{l}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\pi^2(k+n/l)^2}$$

となる．形を整えるために $2k=v$, $\tau=il^2/\pi$ とおくと，上の等式は

$$\vartheta_3(v,\tau)\equiv 1+2\sum_{m=1}^{\infty}e^{-m^2l^2}\cos 2\pi mv=\frac{\sqrt{\pi}}{l}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\pi^2(v+n)^2/l^2} \tag{3.15}$$

となる．$\vartheta_3(v,\tau)$ は（**楕円**）**テータ関数**とよばれるものであって，(3.15) は **Jacobi の虚数変換**にほかならない．すなわち，(3.15) は

$$\vartheta_3\left(\frac{v}{\tau},-\frac{1}{\tau}\right)=\sqrt{\frac{\tau}{i}}e^{i\pi v^2/\tau}\vartheta_3(v,\tau) \tag{3.16}$$

の形に表わせるのである．（読者の演習問題とする．）

例 6 $f(x)=\dfrac{1}{x+ai}$，$a>0$

(7.7.3) により

$$g(\xi)=-je^{-2\pi a\xi}H(\xi).$$

このばあい $f(x)$ は x 軸上で正則であるが，$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$ は収束しない．(3.7) の左辺の無限級数も，主値をとってはじめて収束する．

(3.7) で $l=1$ とすれば，両辺はそれぞれ

$$\mathrm{P}\sum_{m=-\infty}^{\infty}f(m)=f(0)+\sum_{m=1}^{\infty}\{f(m)+f(-m)\}, \tag{3.17}$$

$$\mathrm{P}\sum_{n=-\infty}^{\infty}g(n)=g(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\{g(n)+g(-n)\} \tag{3.18}$$

となる．いまのばあい，

$$f(0)=-\frac{i}{a},\quad f(m)+f(-m)=-\frac{2ai}{m^2+a^2},$$

$$g(0)=-jH(0)=-\frac{j}{2},$$

$$g(n)+g(-n)=-je^{-2\pi na}.$$

これらを (3.17)，(3.18) に代入すれば，右辺の無限級数は確かに収束する．(3.17) では，$m\to\infty$ のとき級数の各項が $1/m^2$ のようにふるまい，(3.18) では幾何級数になるからである．

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{-2\pi na}=\frac{e^{-2\pi a}}{1-e^{-2\pi a}}$$

を使って整理すると，容易につぎの結果が得られる．

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2+a^2}=\frac{\pi}{2a}\coth\pi a-\frac{1}{2a^2}. \tag{3.19}$$

この等式は $a>0$ という条件のもとに導かれたのであるが，a を任意の複素数としてもよい．両辺が a の解析関数だからである（解析接続！）．こうして，$\coth\pi z$ の部分分数展開式がつぎのように得られる．

$$\coth\pi z=\frac{1}{\pi z}+\frac{2z}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{z^2+m^2}. \tag{3.20}$$

なお，この例で注意すべきは，$g(\xi)$ が $\xi=0$ で不連続であることである．それにもかかわらず，$g(0)=\{g(+0)+g(-0)\}/2$ をとることによって，Poisson の和公式が応用できるのである．

例 7　$f(x)=\dfrac{1}{x+a}$，a=実数$\neq 0$

$\mathcal{F}(1/x)=-\pi i\,\mathrm{sgn}\,\xi$, $\mathcal{F}f(x+a)=e^{ja\xi}\mathcal{F}f(x)$ を使えば

$$g(\xi)=-\pi i\,\mathrm{sgn}\,\xi\cdot e^{ja\xi}$$

が得られる．(3.17), (3.18) を計算しよう．

$$f(0)=\frac{1}{a},\qquad f(m)+f(-m)=-\frac{2a}{m^2-a^2},$$

$$g(0)=0,\qquad g(n)+g(-n)=2\pi\sin 2\pi na.$$

したがって

$$\mathrm{P}\sum_{m=-\infty}^{\infty}f(m)=\frac{1}{a}-2a\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2-a^2},\tag{3.21}$$

$$\mathrm{P}\sum_{n=-\infty}^{\infty}g(n)=2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\sin 2\pi na.\tag{3.22}$$

このばあい，(3.21) は a が整数でなければ収束するが，(3.22) は $2a$ が整数のばあいを除いては発散する ($n\to\infty$ のとき $\sin 2\pi na\to 0$ ではない!) それゆえ，Poisson の和公式は**適用できない．**

しかし，かりに和公式が成り立つとして，形式的に計算すると

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2-a^2}=-\frac{\pi}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\sin 2\pi na+\frac{1}{2a^2}$$

となる．ふつうの意味では右辺の Fourier 級数は発散するが，超関数の Fourier 級数としては

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx=\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}\tag{3.23}$$

が成り立つことが，(10.9.11) 式として知られている．もしこれを使えば，上の式は

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2-a^2}=-\frac{\pi}{2a}\cot\pi a+\frac{1}{2a^2}\tag{3.24}$$

となる． 途中の推論はあやしいが，結果的には (3.24) は正しい．実際，この式は (3.19) の a を ai におきかえて得られるものであって，(3.19) 自身が任意の複素数 a に対して成り立つからである．

例 8　$f(x)=H(x;-\lambda,\lambda)\equiv H(x+\lambda)-H(x-\lambda)$

(5.5.8) により

$$g(\xi)=\frac{\sin 2\pi\lambda\xi}{\pi\xi}$$

である．いま，$0<\lambda<1$ とすれば

$$f(0)=1,\qquad f(m)+f(-m)=0,$$

$$g(0)=2\lambda,\qquad g(n)+g(-n)=2\frac{\sin 2\pi n\lambda}{\pi n}.$$

これらを (3.17), (3.18) に代入して整理すれば

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin 2\pi n\lambda=\frac{\pi}{2}(1-2\lambda),\quad 0<\lambda<1 \tag{3.25}$$

が得られる．

例 9　$f(x)=\dfrac{e^{jkx}}{x^2+a^2}$，$a>0$

(7.7.6) により $g(\xi)=(\pi/a)e^{-2\pi a|\xi-k|}$．いま，$0\leqq k\leqq 1$ と仮定しよう．このばあい

$$f(0)=\frac{1}{a^2},\quad f(m)+f(-m)=\frac{2\cos 2\pi mk}{m^2+a^2},$$

$$g(0)=(\pi/a)e^{-2\pi ak},$$

$$g(n)+g(-n)=\frac{\pi}{a}\{e^{-2\pi a|n-k|}+e^{-2\pi a|n+k|}\}$$

$$=\frac{\pi}{a}e^{-2\pi na}(e^{2\pi ak}+e^{-2\pi ak}).$$

これらを (3.17), (3.18) に代入して整理すれば

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi mk}{m^2+a^2}=\frac{\pi}{2a}\frac{\cosh \pi a(1-2k)}{\sinh \pi a}-\frac{1}{2a^2},\quad 0\leqq k\leqq 1 \tag{3.26}$$

が得られる．

(3.26) の左辺は k に関する Fourier 級数である．それゆえ，これを k についての周期 1 の周期超関数と考えることができる．その 1 周期分**だけ**が (3.26) の右辺で表わされるのである．その**超関数**を k について微分すると，

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m\sin 2\pi mk}{m^2+a^2}=\frac{\pi}{2}\frac{\sinh \pi a(1-2k)}{\sinh \pi a},\quad 0<k<1 \tag{3.27}$$

が得られる．k の**ふつうの関数**としては，(3.26) が $0\leqq k\leqq 1$ の範囲で成り立つのに対して，(3.27) は $0<k<1$ でしか成り立たないことに注意してほしい．

なお，

$$f(x)=\frac{xe^{jkx}}{x^2+a^2}g(\xi)=-\pi ie^{-2\pi a|\xi-k|}\operatorname{sgn}(\xi-k)$$

をとって上と同様の計算を行なうと (3.27) が得られるが，これは読者の演習問題としよう．

以上の諸例から見られるように，Poisson の和公式は，(ｉ) 与えられた無限級数を収束性の良い無限級数に変換したり，(ii) 無限級数を閉じた形に表わそうとするばあいなどに極めて有力な手段として役立つのである．

§4.　周期超関数のたたみこみ

Poisson の和公式を導く際に用いた δ 関数列は周期超関数のうちもっとも基本的なものである．つぎに，任意の周期超関数について一般的にたたみこみを考えよう．

まず，つぎの定理が成り立つ．

[定理 6] 周期超関数と任意の超関数のたたみこみは，もし存在するならば，同じ周期の周期超関数である．

（証明） $f(x)$ を周期 l の周期超関数とすれば

$$f(x+l)=f(x) \tag{4.1}$$

である．いま，$f_1(x)$ を任意の超関数とし，

$$f(x)*f_1(x)=h(x) \tag{4.2}$$

とおけば，定理 13.16 により

$$\begin{aligned} h(x+l) &= f(x+l)*f_1(x) \\ &= f(x)*f_1(x) \\ &= h(x). \end{aligned}$$

したがって，$h(x)$ も周期 l の周期超関数である．▮

さて，上の定理では，たたみこみの存在することが前提条件になっている．どのようなばあいにたたみこみが存在するか，また交換法則が成り立つか，などを調べよう．そのために，まず，周期超関数としてもっとも基本的な δ 関数列について考える．

[定理 7] δ 関数列 $\delta(x,l)$ と超関数 $f(x)$ のたたみこみは

$$\delta(x,l)*f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(x-nl) \tag{4.3}$$

のように表わされる．たたみこみを無限主値積分の意味で考えるばあいには，右辺の無限級数も主値をとるものとする．そのばあい，$\delta(x,l)*f(x)$, $f(x)*\delta(x,l)$ のどちらか一方が存在するとき他方も存在して交換法則が成り立つための必要十分条件は，

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=N}^{N+p}f(x-nl)=0 \tag{4.4}$$

が任意の正の整数 p に対して成り立つことである．

（証明） $f(x)=\mathrm{H.F.}F(z)$ とし

$$K(z;a,b)=\int_a^b\delta(t,l)F(z-t)dt \tag{4.5}$$

を考える．$\delta(x,l)$ の定義式 (10.7.2)：

$$\delta(x,l)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-nl) \tag{4.6}$$

を代入すれば

$$K(z;a,b)=\int_a^b\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nl)F(z-t)dt$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_a^b\delta(t-nl)F(z-t)dt$$
$$=\sum_{n=M}^{N}F(z-nl). \tag{4.7}$$

ただし，M, Nは整数で

$$M-1<\frac{a}{l}<M,\quad N<\frac{b}{l}<N+1$$

を満足する．したがって $M\to-\infty$, $N\to\infty$ はそれぞれ $a\to-\infty$, $b\to\infty$ に対応する．(4.7) の等式は

$$\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}K(z;a,b)\ \text{と}\ \lim_{\substack{M\to-\infty\\ N\to\infty}}\sum_{n=M}^{N}F(z-nl)$$

が同時に存在すること，したがって (4.3) が成り立つことを示すのである．

$a=-R$, $b=R$; $M=-N$ とおけば，主値のばあいになる．

つぎに，定理 2 で $f_1(x)=\delta(x,l)$, $f_2(x)=f(x)$ のばあいを考える．

$$\int_R^{R+a}f_1(t)F_2(z-t)dt=\sum_{n=N}^{N+p}F(z-nl),$$
$$N-1<R/l<N,\quad N+p<(R+a)/l<N+p+1$$

であるが，第 2 の不等式は第 1 の不等式により $p<a/l<p+2$ と書きかえられる．したがって，a を一定に保ち $R\to\infty$ とすることは，p を一定に保ち $N\to\infty$ とすることと同等である．それゆえ (2.9) の条件式は

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=N}^{N+p}F(z-nl)\cong 0$$

となる．これの H.F. をとれば (4.4) が得られる．

ここで p は任意の整数であるが，これを正の整数としてもよい．なぜなら，もし $p<0$ ならば $N+p=N'$ (したがって $N=N'+|p|$) とおいて $N'\to\infty$ を考えればよいからである． ∎

ふつうの意味でたたみこみ $\delta(x,l)*f(x)$ が存在するばあいには (4.3) の右辺の無限級数は収束するから，もちろん (4.4) が成り立つ．したがって交換法則 : $\delta(x,l)*f(x)=f(x)*\delta(x,l)$ が自動的に成り立つ．(4.4) の条件が重要な意味をもつのは，たたみこみが無限主値積分の意味でのみ定義されるばあいである．たとえばつぎの例 10 を見よ．

例 10　$\delta(x,l)*\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{l}\cot\dfrac{\pi x}{l}$　　(4.8)

これは定理 7 で $f(x)=1/x$ のばあいである．(4.3) の右辺の無限級数の各項は $O(1/n)$ であるから発散する．すなわち，ふつうの意味では左辺のたたみこみは存在しない．しかし，無限主値級数を考えると

$$\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{x-nl}=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{x-nl}+\frac{1}{x+nl}\right)$$
$$=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{N}\frac{2x}{x^2-n^2l^2}$$

であるから，各項は $O(1/n^2)$ となり，級数は収束する．その値は，たとえば (3.24) により $(\pi/l)\cot(\pi x/l)$ である．したがって，無限主値積分の意味で (4.8) が成り立つ．また，(4.4) の条件は明らかに満足されるから，交換法則：

$$\delta(x,l)*\frac{1}{x}=\frac{1}{x}*\delta(x,l)$$

も成り立つのである．

[定理 8]　周期 l の周期超関数 $f(x,l)$ の標準母関数は

$$\tilde{F}(z,l)=f_0(x)*\delta(z,l) \tag{4.9}$$

で与えられる．ただし，$f_0(x)$ は $f(x,l)$ を 1 周期だけ考えた超関数，$\delta(z,l)$ は δ 関数列 $\delta(x,l)$ の母関数であって，それぞれ

$$f_0(x)=f(x,l)H(x;x_0,x_0+l), \tag{4.10}$$

$$\delta(z,l)=\frac{i}{2l}\cot\frac{\pi z}{2l} \tag{4.11}$$

である．

(証明)　無限主値級数の記法と定理 13.7 を使えば，定理 10.6 は

$$\tilde{F}(z,l)=\mathrm{P}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_0(z-nl), \tag{4.12}$$

$$F_0(z)=f_0(x)*\delta(z) \tag{4.13}$$

のように表わされる．(4.13) を (4.12) に代入し，

$$\delta(z,l)=\mathrm{P}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(z-nl) \tag{4.14}$$

に注意すれば (4.9) が得られる．∎

[定理 9]　周期 l の周期超関数 $f(x,l)$ は

$$f(x,l)=f_0(x)*\delta(x,l) \tag{4.15}$$

のように表わされる．ただし，$f_0(x)$ は $f(x,l)$ を 1 周期だけ考えた超関数である．

(証明)　(4.9) の H.F. をとればよい．∎

§5.　Fourier 展 開

すでにわれわれは任意の周期超関数が Fourier 級数として表わされることを知っている．すなわち，定理 10.11 によれば，周期 l の任意の周期超関数 $f(x,l)$ は

$$f(x,l)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{njx/l}, \tag{5.1}$$

$$c_n=\frac{1}{l}g_0\left(\frac{n}{l}\right), \tag{5.2}$$

$$g_0(\xi)=\mathfrak{F}f_0(x)=\int_{x_0}^{x_0+l}f(x,l)e^{-j\xi x}dx \tag{5.3}$$

のように表わされる．ただし，$f_0(x)$ は $f(x,l)$ を 1 周期だけ考えた超関数で，定理 9 によれば

$$f(x,l)=f_0(x)*\delta(x,l) \tag{5.4}$$

の関係がある．

さて，任意の超関数 $f(x)$ と $f(x,l)$ のたたみこみは周期 l の周期超関数であるから，これも当然 Fourier 級数として表わされるはずである．その具体的な形を求めてみよう．

[定理 10]　$g(\xi)=\mathfrak{F}f(x)$ は $\xi=n/l$（n=整数）で値をもつ，すなわち

$$g\left(\frac{n}{l}\right)=\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{-njx/l}dx \tag{5.5}$$

が存在するものとする．このとき

$$f(x)*\delta(x,l)=\delta(x,l)*f(x)=\frac{1}{l}\sum_{n=-\infty}^{\infty}g\left(\frac{n}{l}\right)e^{njx/l} \tag{5.6}$$

が成り立つ．また

$$f(x,l)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n e^{njx/l} \tag{5.7}$$

とすれば

$$f(x)*f(x,l)=f(x,l)*f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n g\left(\frac{n}{l}\right)e^{njx/l} \tag{5.8}$$

が成り立つ．

（証明）　まず

$$f(x)*f(x,l)=f(x)*\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n e^{njx/l}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n f(x) * e^{njx/l}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g\left(\frac{n}{l}\right) e^{njx/l} \qquad \because \ \text{定理 3} \tag{5.9}$$

のような変形を考える．超関数の Fourier 級数は一般に

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{njx/l} \overset{\text{def}}{=} c_0 + \left[\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{njx/l}\right]_+ + \left[\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-njx/l}\right]_- \tag{5.10}$$

で定義されるのであるから，上のように‘たたみこみ’と‘総和’の順序を変更することができるのである．((5.10) の右辺に現われる上・下超関数の母関数の無限級数はそれぞれ上・下半平面で絶対かつ広義一様に収束する!)

さて，$g(n/l)$ の存在が仮定されているから，$a_n g(n/l)$ が存在し，したがってそれを Fourier 係数とする Fourier 級数 (5.9) が存在する．これを順々にさかのぼって変形すると，けっきょく $f(x)*f(x,l)$ に達する．(5.9) で $g(n/l)\cdot a_n$ を係数とした式から出発すれば，同様にして $f(x,l)*f(x)$ に到達する．すなわち (5.8) が証明された．(10.7.16) により

$$\delta(x,l) = \frac{1}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{njx/l}$$

であるから，(5.8) で $a_n=1/l$ とした特別のばあいとして (5.6) が得られる．∎

周期超関数 $f(x,l)$ の Fourier 展開式 (5.1) が定理 10 の (5.6) 式とまったく同じ形をもつことに注意してほしい．実は，(5.4) の表現からわかるように，(5.1) は (5.6) の特別なばあいに相当する．つまり，$f(x)$ として 1 周期だけ考えた超関数（それは中央超関数である）をとったばあいなのである．

定理 7 の (4.3) の表現を（$n \to -m$ とおきかえて）(5.6) に代入すると

$$\mathrm{P} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(x+ml) = \frac{1}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{n}{l}\right) e^{njx/l} \tag{5.11}$$

が得られる．両辺の O.F. をとって $x=0$ とおくと

$$\mathrm{P} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(ml) = \frac{1}{l} \mathrm{P} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{n}{l}\right) \tag{5.12}$$

が得られる．これは前に導いた **Poisson の和公式** (3.7) にほかならない．（ここで無限主値級数が現われるのはなぜか？ 読者の研究をおすすめする.）なお，とくに注意すべきことは，(5.11) は超関数についての等式であり，(5.12) は数値についての等式であることである．

例 11　定理10を応用して (4.8) の関係を導いてみよう.

$$g(\xi)=\mathfrak{F}\frac{1}{x}=-\pi i\,\mathrm{sgn}\,\xi$$

であるから, $g(n/l)=-\pi i\,\mathrm{sgn}\,n$. したがって, (5.6) は

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}*\delta(x,l)&=-\frac{\pi i}{l}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}e^{njx/l}-\sum_{n=-\infty}^{-1}e^{njx/l}\right\}\\&=-\frac{\pi i}{l}\left(\frac{e^{jx/l}}{1-e^{jx/l}}-\frac{e^{-jx/l}}{1-e^{-jx/l}}\right)\\&=-\frac{\pi i}{l}\frac{1+e^{jx/l}}{1-e^{jx/l}}=\frac{\pi}{l}\cot\frac{\pi x}{l}\end{aligned}$$

を与える. 上の第1行目の右辺の括弧内の第1項は上超関数, 第2項は下超関数であるから, 第2行目のように総和することができるのである.

なお, (5.11) を使うと

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{x^2-m^2l^2}=\frac{\pi}{2lx}\cot\frac{\pi x}{l}-\frac{1}{2x^2} \tag{5.13}$$

が得られる. 前に Poisson の和公式を**形式的に**応用して導いた (3.24) の関係式が, ここでは**厳密に**得られたわけである.

例 12　$f(x)=1/x$ として定理10の (5.8) 式を適用すると, $g(n/l)=-\pi i\,\mathrm{sgn}\,n$ であるから,

$$\frac{1}{x}*\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_ne^{njx/l}=-\pi i\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\,\mathrm{sgn}\,n\,e^{njx/l} \tag{5.14}$$

の関係式が得られる. 右辺の Fourier 級数は左辺の Fourier 級数に対する共役 Fourier 級数とよばれるものである. これについてはつぎの章で議論する.

§6.　周期超関数どうしのたたみこみ

$f_1(x), f_2(x)$ を同じ周期 l の周期超関数とすると, $f_1(x)*f_2(x)$ は一般には存在しない. このことは, $x\to\pm\infty$ で $f_1(x), f_2(x)$ がともに有限値をとり続けることから明らかである. また, もしたたみこみが存在するとすれば, その Fourier 変換をとったとき, これは $\mathfrak{F}f_1(x)*\mathfrak{F}f_2(x)$ となることが予想されるが, $\mathfrak{F}f_1(x), \mathfrak{F}f_2(x)$ はそれぞれ δ 関数を含むので, δ 関数の積が現われることになる. これもありそうもないことである. (もしも周期超関数どうしの積が存在するならば, それを利用して δ 関数どうしの積を合理的に定義することができるであろう!)

そこで, 周期超関数については ‘たたみこみ’ の定義をつぎのように変更することにする.

〔**定義 2**〕 $f_1(x), f_2(x)$ を周期 l の周期超関数とする．このとき，$f_1(x)$ と $f_2(x)$ の **Fourier 級数としてのたたみこみ**（あるいは簡単に**Fたたみこみ**とよぶ）を

$$f_1(x)**f_2(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{l}\{f_{10}(x)*f_{20}(x)\}*\delta(x,l)$$

$$= \frac{1}{l}f_1(x)*f_{20}(x) = \frac{1}{l}f_{10}(x)*f_2(x) \tag{6.1}$$

で定義する．ただし，$f_{i0}(x)$ $(i=1,2)$ は $f_i(x)$ を1周期だけ考えた超関数である．

（**合理性**）

$$f(x) = f_1(x)**f_2(x) \tag{6.2}$$

とすれば，(6.1) の第1行目は

$$f(x) = f_0(x)*\delta(x,l), \tag{6.3}$$

$$f_0(x) = \frac{1}{l}\{f_{10}(x)*f_{20}(x)\} \tag{6.4}$$

と書き表わされる．$f_{10}(x), f_{20}(x)$ はともに中央超関数であるから，$f_0(x)$ も中央超関数であって，(6.3) により $f(x)$ は確かに存在するのである．(6.1) の第2行目は，たたみこみの結合法則によってただちに得られる．∎

この定義から容易につぎの定理が導かれる．証明は読者にまかせる．

[定理 11]　Fたたみこみについて交換，配分，結合の法則が成り立つ．したがって，たとえば n 個の周期超関数のFたたみこみは

$$f_1(x)**f_2(x)**\cdots**f_n(x)$$

$$= \frac{1}{l^{n-1}}\{f_{10}(x)*f_{20}(x)*\cdots*f_{n0}(x)\}*\delta(x,l) \tag{6.5}$$

で与えられ，演算の順序によらない．

つぎに，周期超関数を Fourier 級数で表わしたとき，Fたたみこみがどうなるかを調べよう．

[定理 12]

$$f_1(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{njx/l}, \tag{6.6}$$

$$f_2(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{njx/l} \tag{6.7}$$

とすれば

$$f_1(x)**f_2(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n b_n e^{njx/l} \tag{6.8}$$

である．

(証明)
$$f_i(x)=f_{i0}(x)*\delta(x,l)\qquad(i=1,2)\tag{6.9}$$
とおけば
$$f_1(x)**f_2(x)=f_0(x)*\delta(x,l),\tag{6.10}$$
$$f_0(x)=\frac{1}{l}\{f_{10}(x)*f_{20}(x)\}\tag{6.11}$$
である．いま
$$f_1(x)**f_2(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{njx/l}\tag{6.12}$$
とすれば，定理 10 により
$$c_n=\frac{1}{l}g_0\left(\frac{n}{l}\right).\tag{6.13}$$
ただし，$g_0(\xi)=\mathfrak{F}f_0(x)$ である．ところが，(6.11) により
$$\mathfrak{F}f_0(x)=\frac{1}{l}\mathfrak{F}f_{10}(x)\cdot\mathfrak{F}f_{20}(x)$$
$$=\frac{1}{l}g_{10}(\xi)\cdot g_{20}(\xi).$$
$$\therefore\quad\frac{1}{l}g_0(\xi)=\frac{1}{l}g_{10}(\xi)\cdot\frac{1}{l}g_{20}(\xi).$$
$a_n=g_{10}(n/l)l$, $b_n=g_{20}(n/l)l$ を想い起こすと，ただちに
$$c_n=a_nb_n\tag{6.14}$$
の関係が得られる．∎

この定理からわかるように，Fourier 級数の **F たたみこみ**を求めるためには，単に Fourier 係数の 積を 係数とする Fourier 級数をつくればよいのである．**Fourier 級数としてのたたみこみ**という名称のふさわしいことはこれで理解されるだろう．3 個以上の Fourier 級数の F たたみこみについても，Fourier 係数の積を係数とする Fourier 級数をつくればよいことはいうまでもない．

[定理 13] $f(x)$ を任意の超関数，$f(x,l)$ を周期 l の周期超関数とすれば
$$f(x)*f(x,l)=l\{f(x)*\delta(x,l)\}**f(x,l)\tag{6.15}$$
が成り立つ．

(証明) $f(x,l)$ は周期超関数であるから
$$f(x,l)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_ne^{njx/l}\tag{6.16}$$
のように Fourier 級数として表わされる．いま $\mathfrak{F}f(x)=g(\xi)$ とすれば，定理 10 により

$$f(x)*f(x,l)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n g\left(\frac{n}{l}\right)e^{njx/l}, \qquad (6.17)$$

$$f(x)*\delta(x,l)=\frac{1}{l}\sum_{n=-\infty}^{\infty}g\left(\frac{n}{l}\right)e^{njx/l} \qquad (6.18)$$

である．そこで，定理 12 で $f_1(x)\equiv f(x)*\delta(x,l)$，$f_2(x)\equiv f(x,l)$ としたものを考えると，ただちに (6.15) の等式が得られる．∎

この定理は，周期超関数と非周期超関数の**たたみこみ**が周期超関数どうしの**Fたたみこみ**として表わされることを述べる．そして，定理 12 は後者が Fourier 級数についての簡単な演算——Fourier 係数どうしの積をつくる——で表わされることを述べるのである．Fたたみこみという概念を導入したのは，このような背景があってのことである．

§7. ま　と　め

無限主値積分を用いることによって‘たたみこみ’の概念を拡張して**Pたたみこみ**を定義した．この定義によると，たたみこみの交換法則は必ずしも成り立たないので，それが成り立つための必要十分条件を与えた．もとの意味でのたたみこみではこの条件はつねに満足され，したがって交換法則はいつでも成り立つのである．さらに，無限主値積分に対応して無限主値級数を定義した．δ 関数列と任意の超関数について Parseval の定理を適用して Poisson の和公式を導いた．超関数論を基礎とするため，この和公式の成立範囲はふつうに知られているものよりはるかに広くなっている．その様子をいくつかの例について説明した．

つぎに，周期超関数と任意の（非周期的な）超関数のたたみこみが周期超関数であることを知り，それについて一般的な議論を行なった．また，周期超関数どうしのたたみこみは存在しないので，‘たたみこみ’に代るものとして**Fたたみこみ**というものを定義した．実は，周期超関数と非周期超関数のたたみこみは，周期超関数どうしのFたたみこみとして表わされるのである．なお，Fたたみこみが，Fourier 級数による周期超関数の表現ではとくに簡単な形をもつことを知った．

15 Hilbert 変換, 共役超関数

§1. はじめに

Hilbert 変換や共役 Fourier 級数は理工学の種々の問題を解くのにしばしば応用される. これを超関数論の立場で統一的に議論しようというのが本章の目的である. Hilbert 変換が超関数 $1/x$ との'たたみこみ'にほかならないこと, また, 共役 Fourier 級数というのは周期超関数(つまり Fourier 級数)の Hilbert 変換であることがわかるだろう. したがって, この章の内容は第 13 章と第 14 章の 1 つの応用例とも考えられるのである. 関数論で現われる Poisson-Schwarz の積分公式も本書では Hilbert 変換の立場で議論されるので, その基礎になる種々の公式をこの章で導いておく.

§2. Hilbert 変換

さて, **ふつうの関数 $f(x)$ の Hilbert 変換**は

$$\mathscr{H}f(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi} \mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-x} dt \tag{2.1}$$

で定義される. ただし, P は Cauchy の主値を意味する. (被積分関数が $t=x$ で特異点をもつことに注意! 超関数の無限主値積分についても同じ記号 $\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty}$ を用いるが, 混同のおそれはないだろう.)

超関数に対しても同じ記号 $\mathscr{H}$ を使ってつぎのように定義する.

〔**定義 1**〕 超関数 $f(x)$ に対して, それと $-1/\pi x$ との P たたみこみ, すなわち

$$g(x) \equiv \mathscr{H}f(x) \overset{\text{def}}{=} f(x) * \left(-\frac{1}{\pi x}\right) \tag{2.2}$$

を $f(x)$ の **Hilbert 変換**あるいは**共役超関数**という. また, このとき $f(x) = \mathscr{H}^{-1}g(x)$ と書き, $f(x)$ は $g(x)$ の **Hilbert 逆変換**であるという. $f(x)$ の共役超関数はしばしば記号 $[f(x)]^*$ あるいは $f^*(x)$ で表わされる.

[定理 1] 超関数 $f(x)$ の正則点に対して

$$\mathrm{O.F.}\{\mathcal{H}f(x)\}=\mathcal{H}\{\mathrm{O.F.}f(x)\} \tag{2.3}$$

が成り立つ．

（証明） (2.2) の O.F. をとると

$$\mathrm{O.F.}\{\mathcal{H}f(x)\}=-\frac{1}{\pi}\mathrm{O.F.}\left\{f(x)*\frac{1}{x}\right\}$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cdot\frac{1}{t-x}dt.$$

ただし，定理 13.4 を使う．右辺は超関数の定積分であるから，もちろん x のふつうの関数である．さて，定義 11.7 によれば，これは

$$=\frac{1}{\pi}\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{O.F.}\left\{\frac{f(t)}{t-x}\right\}dt$$
$$=\frac{1}{\pi}\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{O.F.}f(t)}{t-x}dt$$

のように変形できる．ところが，最後の表式は，(2.1) により，ふつうの関数 O.F.$f(x)$ の Hilbert 変換である．■

(2.3) の両辺で $\mathcal{H}$ の意味は異なる．右辺では**ふつうの関数**に対する Hilbert 変換，左辺では**超関数**に対する Hilbert 変換を意味する．したがって，(2.3) の等式は超関数の Hilbert 変換に対する定義 1 の合理性を示すものと考えられる．

まず，Hilbert 変換について基本的な事柄を定理としてまとめておく．

[定理 2] $\mathcal{H}f(x)$ が存在するための必要十分条件は，$f(x)$ が標準母関数 $\tilde{F}(z)$ をもつことである．しかも

$$\mathcal{H}f(x)=2i\,\mathrm{H.F.}\{\tilde{F}(z)\mathbf{1}(z)\} \tag{2.4}$$

の関係が成り立つ．

（証明） Hilbert 変換の定義 1 とたたみこみの定義 13.1 により，つぎのような等式がつぎつぎに得られる．

$$\mathcal{H}f(x)=-\frac{1}{\pi}f(x)*\frac{1}{x}$$
$$=-\frac{1}{\pi}\mathrm{H.F.}\left\{f(x)*\frac{1}{z}\mathbf{1}(z)\right\}$$
$$=-\frac{1}{\pi}\mathrm{H.F.}\left\{\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{z-t}dt\,\mathbf{1}(z)\right\}$$
$$=2i\,\mathrm{H.F.}\{\tilde{F}(z)\mathbf{1}(z)\}.$$

すなわち(2.4)式である．ただし

$$\tilde{F}(z)=\frac{1}{j}\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{t-z}dt=f(x)*\delta(z) \qquad (2.5)$$

とおいてある．ところが，定義10.3により，(2.5)で与えられる $\tilde{F}(z)$ は実は $f(x)$ の標準母関数である．したがって，(2.4)式は $\mathscr{H}f(x)$ の存在と標準母関数 $\tilde{F}(z)$ の存在が同等であることを示すのである．▮

この定理は，$\mathscr{H}f(x)$ に関する議論を行なう際には，その存在を前提とする限り，$f(x)$ は当然標準母関数をもつものと仮定してもよいことを示している．なお，この定理の内容は定理13.7と定理13.8に実質的に含まれていることを注意しておこう．

[定理 3] 超関数 $f(x)$ は標準母関数 $\tilde{F}(z)$ をもち，$\tilde{F}(z)$ は $z\to\infty$ のとき適当な正の整数 m に対して $z^{-m}\tilde{F}(z)\to 0$ を満足するものとする．このとき，$\mathscr{H}f(x)=0$ ならば，$f(x)$ は定数である．

（証明） 定理2により，(2.4)の関係が成り立つ．したがって，$\mathscr{H}f(x)=0$ は

$$\tilde{F}(z)\mathbf{1}(z)=\varphi(z) \qquad (2.6)$$

を意味する．ただし，$\varphi(z)$ は x 軸を含むある領域で正則な解析関数である．(2.6)の両辺に $\mathbf{1}(z)$ を掛け，$\{\mathbf{1}(z)\}^2=1/4$ に注意すれば

$$\tilde{F}(z)=4\varphi(z)\mathbf{1}(z) \qquad (2.7)$$

が得られる．$\tilde{F}(z)$ は標準母関数であるから，上半平面および下半平面で正則，したがって(2.7)により $\varphi(z)$ は x 軸を含む全平面で正則である．つまり，$\varphi(z)$ は整関数である．ところが，仮定により，$z\to\infty$ のとき $z^{-m}\varphi(z)\to 0$ である．したがって整関数に関する Liouville の定理により，$\varphi(z)$ は $m-1$ 次の多項式でなければならない．さて，(2.7)により $f(x)=4\varphi(x)$ である．容易に確かめられるように，多項式の Hilbert 変換が存在するのは，定数，すなわち0次式のばあいに限る．したがって，$f(x)$ は定数でなければならない．▮

上の定理で仮定されている $f(x)$ に関する条件は極めて緩いものであって，ふつうお目にかかる超関数ではつねに満足されていると考えられる．そこで，今後とくに断わらないかぎり，この条件にしたがう超関数のみをとり扱うことにする．

[定理 4] 超関数 $f(x)$ は標準母関数 $\tilde{F}(z)$ をもち，かつ $\mathrm{Im}\, z\to\pm\infty$ のとき $\tilde{F}(z)\to 0$ であるとする．このとき

$$\mathcal{H}\mathcal{H}f(x) = -f(x), \tag{2.8}$$

すなわち $\mathcal{H}^{-1}=-\mathcal{H}$ の関係が成り立つ．したがって，超関数 $f(x)$ とその共役超関数 $f^*(x)$ のあいだに

$$[f^*(x)]^* = -f(x) \tag{2.9}$$

の関係が成り立つ．

（証明） (2.4) は

$$\mathcal{H}f(x) = \text{H.F.}\, F_1(z), \tag{2.10}$$

$$F_1(z) = 2i\tilde{F}(z)\mathbf{1}(z) \tag{2.11}$$

と書き表わすことができる．仮定により，$\mathrm{Im}\, z\to\pm\infty$ のとき $\tilde{F}(z)\to 0$ が成り立つ．したがって，(2.11) で与えられる $F_1(z)$ も同じ条件を満たす．したがって，定理 10.3 により $F_1(z)$ は標準母関数である．そこで，ふたたび (2.4) を適用すると，

$$\begin{aligned}\mathcal{H}\mathcal{H}f(x) &= 2i\,\text{H.F.}\{F_1(z)\mathbf{1}(z)\}\\ &= -\text{H.F.}\,\tilde{F}(z) = -f(x).\end{aligned}$$

ただし，$\mathbf{1}(z)\mathbf{1}(z)=1/4$ を使った．∎

[定理 5] G.F. $g(\pm i\infty)=0$ ならば，

$$\mathcal{H}f(x) = g(x) \tag{2.12}$$

を満足する $f(x)$ が存在して，

$$f(x) = -\mathcal{H}g(x)+c \tag{2.13}$$

で与えられる．ただし，c は任意定数である．

（証明） 定義 10.4 と定理 10.3 によれば，G.F. $g(\pm i\infty)=0$ というのは，$g(x)$ が標準母関数 $\tilde{G}(z)$ をもち，$\tilde{G}(z)$ は $|x|\to\infty$ で有界，$\mathrm{Im}\, z\to\pm\infty$ のとき x に関して一様に $\tilde{G}(z)\to 0$ となることである．このばあい，定理 4 により

$$\mathcal{H}\mathcal{H}g(x) = -g(x)$$

が成り立つ．この右辺に (2.12) を代入して移項すれば

$$\mathcal{H}\{\mathcal{H}g(x)+f(x)\} = 0$$

となる．したがって，定理 3 により (2.13) が得られる．∎

(2.8) の関係は無条件で成り立つものではないことに注意する必要がある．たとえば $f(x)=1$ とすれば

$$\mathcal{H}1 = 0, \qquad \mathcal{H}\mathcal{H}1 = 0$$

となり，(2.8) は成り立たない． このばあい $\tilde{F}(z)=\mathbf{1}(z)$ は定理 4 の前提条件を満足しないのであるから，(2.8) が成り立たなくても別に不思議はないのである．

例 1 標準母関数を記号 G.$\tilde{\mathrm{F}}$. で表わせば

$$\mathrm{G.\tilde{F}.}\,\delta(x,l)=\delta(z,l)\equiv\frac{i}{2l}\cot\frac{\pi z}{l},\tag{2.14}$$

$$\mathrm{G.\tilde{F}.}\cot\frac{\pi z}{l}=\cot\frac{\pi z}{l}\cdot\mathbf{1}(z)+\frac{i}{2}.\tag{2.15}$$

これを確かめるには，$\mathrm{Im}\,z\to\pm\infty$ のとき

$$\cot\frac{\pi z}{l}=i\frac{e^{j\pi z/l}+1}{e^{j\pi z/l}-1}\to\mp i\tag{2.16}$$

であることに注意して，定理 10.3 を適用すればよい． (2.15) の右辺の定数項 $i/2$ は忘れやすいので注意すること！

§3. 共役超関数の性質

任意に超関数 $f(x)$ を与えたとき， その共役超関数 $f^*(x)=\mathscr{H}f(x)$ は必ずしも存在するとは限らない． しかし，もしも $f(x)$ が定理 4 の前提条件を満足すれば，$f^*(x)$ が存在して，もとの超関数は $f(x)=-\mathscr{H}f^*(x)$ によって求められるのである．つぎに，$f(x)$ の**上下型性**，**虚実性**，**偶奇性**が $f^*(x)$ のそれとどのように対応するかを調べよう．

[定理 6] 共役超関数の上下型性と虚実性はもとの超関数と同じである．また，偶奇性は入れかわる．

(証明) Hilbert 変換を行なうことは $-1/\pi x$ とのたたみこみをとることである．ところが，$1/x$ は実で奇の超関数である． したがって， 定理 13.25，定理 13.19 と定理 13.18 を適用すれば，ただちに上の結論が得られる． ∎

[定理 7] $f_+(x), f_-(x)$ はそれぞれ上および下超関数であって $\mathrm{Im}\,z\to\pm\infty$ で 0 になる標準母関数をもつものとする．このとき

$$\mathscr{H}f_\pm(x)=\pm if_\pm(x),\tag{3.1}$$

$$\mathscr{H}\mathrm{Re}f_\pm(x)=\mp\mathrm{Im}f_\pm(x),\tag{3.2}$$

$$\mathscr{H}\mathrm{Im}f_\pm(x)=\pm\mathrm{Re}f_\pm(x)\tag{3.3}$$

が成り立つ．

(証明) まず $f_+(x)$ を考える．仮定により，標準母関数

$$\tilde{F}(z)=\varphi(z)\mathbf{1}_+(z)\tag{3.4}$$

が存在する．ただし，$\varphi(z)$ は $\mathrm{Im}\,z>0$ で正則で，$\mathrm{Im}\,z\to+\infty$ のとき $\varphi(z)\to 0$ である．(3.4) を定理 2 の (2.4) 式の右辺に代入すれば，$\mathbf{1}(z)=1/2[1,-1]$ であるから，

$$\begin{aligned}\mathscr{H}f_+(x) &= i\,\mathrm{H.F.}\,\varphi(z)\mathbf{1}_+(z)\\ &= i\,\mathrm{H.F.}\,\tilde{F}(z) = if_+(x)\end{aligned} \tag{3.5}$$

が得られる．

つぎに，$f_+(x)=\mathrm{Re}f_+(x)+i\mathrm{Im}f_+(x)$ のように分解し，これを (3.5) に代入して，実数部と虚数部に分けると

$$\mathscr{H}\,\mathrm{Re}f_+(x) = -\mathrm{Im}f_+(x), \tag{3.6}$$

$$\mathscr{H}\,\mathrm{Im}f_+(x) = \mathrm{Re}f_+(x) \tag{3.7}$$

が得られる．ただし，定理 6 を使った．(3.5), (3.6), (3.7) はそれぞれ (3.1), (3.2), (3.3) の $f_+(x)$ のばあいである．$f_-(x)$ のばあいについても同様に証明できる．▮

[定理 8] つぎの関係が成り立つ．

$$\mathscr{H}1 = 0, \tag{3.8}$$

$$\mathscr{H}e^{ikx} = \pm ie^{ikx},\ \ k\gtrless 0 \tag{3.9}$$

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{H}\sin kx &= \cos kx,\\ \mathscr{H}\cos kx &= -\sin kx,\end{aligned}\right\}\ \ k>0 \tag{3.10}$$

$$\mathscr{H}\delta(x) = -\frac{1}{\pi x}, \tag{3.11}$$

$$\mathscr{H}\frac{1}{x} = \pi\delta(x), \tag{3.12}$$

$$\mathscr{H}\delta(x,l) = -\frac{1}{l}\cot\frac{\pi x}{l}, \tag{3.13}$$

$$\mathscr{H}\cot\frac{\pi x}{l} = l\delta(x,l)-1. \tag{3.14}$$

（証明） (2.4) に $\tilde{F}(z)=\mathbf{1}(z)$ を代入すれば (3.8) が得られる．例 10.4 により $\mathrm{G.}\tilde{\mathrm{F}}e^{ikx}=e^{ikz}\mathbf{1}_\pm(z)$ $(k\gtrless 0)$ である．したがって，(3.1) により (3.9) が得られる．これを実数部と虚数部に分けたものが (3.10) である．

つぎに，一般的な関係式 $f(x)*\delta(x)=f(x)$ で $f(x)=-1/\pi x$ ととれば (3.11) が得られる．これの逆変換が (3.12) である．

最後に，(2.14) により，$\delta(x,l)$ の標準母関数は

$$\delta(z,l) = \frac{i}{2l}\cot\frac{\pi z}{l} \tag{3.15}$$

である．これを (2.4) の $\tilde{F}(z)$ として採用すれば

$$\mathscr{H}\delta(x,l) = -\frac{1}{l}\,\mathrm{H.F.}\left\{\cot\frac{\pi z}{l}\mathbf{1}(z)\right\}$$
$$= -\frac{1}{l}\cot\frac{\pi x}{l}$$

が得られる．これは (3.13) である．(2.15) を使って同様の計算をすれば (3.14) が得られる．((3.13) の逆変換を‘機械的に’行なってはいけない．なぜか？) ▮

注意 (3.13) の関係は例 14.10 の (14.4.8) と実質的に同じである．例 14.11 でも同じ結果を導いたが，ここの求め方が最も簡明であると思われる．

[定理 9] $f_1(x)$ は中央超関数，$f_2(x)$ は $\mathrm{Im}\,z\to\pm\infty$ のとき 0 になる標準母関数をもつ超関数とする．このとき

$$\mathscr{H}\{f_1(x)*f_2(x)\} = f_1(x)*\mathscr{H}f_2(x) \qquad (3.16)$$

が成り立つ．

(証明) $f_2(x) = \mathrm{H.F.}\,\tilde{F}_2(z)$ とすれば

$$f_1(x)*f_2(x) = \mathrm{H.F.}\,H(z), \qquad (3.17)$$

$$H(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\tilde{F}_2(z-t)dt \qquad (3.18)$$

である．仮定により $\tilde{F}_2(z)$ は標準母関数で，かつ $\mathrm{Im}\,z\to\pm\infty$ のとき $\tilde{F}_2(z)\to 0$ である．しかも $f_1(x)$ は中央超関数であるから，(3.18) の積分で定義される $H(z)$ は $\mathrm{Im}\,z \gtrless 0$ で正則で，かつ $\mathrm{Im}\,z\to\pm\infty$ で 0 になる．したがって，定理 10.3 により $H(z)$ は標準母関数である．したがって，定理 2 により

$$\mathscr{H}\{f_1(x)*f_2(x)\} = 2i\,\mathrm{H.F.}\{H(z)\mathbf{1}(z)\} \qquad (3.19)$$

である．一方，定理 2 により

$$\mathscr{H}f_2(x) = 2i\,\mathrm{H.F.}\{\tilde{F}_2(z)\mathbf{1}(z)\}$$

であるから，

$$f_1(x)*\mathscr{H}f_2(x) = 2i\,\mathrm{H.F.}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\tilde{F}_2(z-t)\mathbf{1}(z-t)dt$$
$$= 2i\,\mathrm{H.F.}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\tilde{F}_2(z-t)dt\cdot\mathbf{1}(z)\right\}$$
$$= 2i\,\mathrm{H.F.}\{H(z)\mathbf{1}(z)\} \qquad (3.20)$$

となる．(3.19) と (3.20) を比較すれば (3.16) が得られる．▮

この定理は容易につぎのように拡張される．

[定理 10] $f_1(x)$ は中央超関数，$f_2(x)$ はその母関数 $F_2(z)$ が $\mathrm{Im}\,z \gtrless 0$ で正則で，$\mathrm{Im}\,z \to \pm\infty$ のとき $F_2(z) \to \mathrm{const}$ であるような超関数とする．このとき，(3.16) の関係式が成り立つ．

（証明）$\mathrm{Im}\,z \to \pm\infty$ のとき $F_2(z) \to c_\pm$（$c_\pm$ は定数）とする．いま

$$F(z) = F_2(z) - [c_+, c_-] \tag{3.21}$$

とおくと，$F(z)$ は $\mathrm{Im}\,z \gtrless 0$ で正則で，$\mathrm{Im}\,z \to \pm\infty$ のとき 0 となるから，定理 10.3 により標準母関数である．それの表わす超関数は

$$f(x) = \mathrm{H.F.}\,F(z) = f_2(x) - (c_+ - c_-) \tag{3.22}$$

である．この $f(x)$ は定理 9 の $f_2(x)$ として用いることができる．ところが

$$f_1(x)*1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)dx = \mathrm{const},$$

$$\mathcal{H}1 = 0 \qquad \because\ (3.8)$$

であるから，(3.22) の $f(x)$ を (3.16) の $f_2(x)$ として使えば，const の項は両辺で消えて，(3.16) 式がそのまま成り立つことになる．∎

§4. 共役 Fourier 級数

これまで，任意の超関数 $f(x)$ について Hilbert 変換 $\mathcal{H}f(x)$ を考えてきた．つぎに，$f(x)$ が周期超関数のばあいを考えよう．定理 14.6 によれば，$\mathcal{H}f(x)$ は $f(x)$ と同じ周期の周期超関数である．したがって，両者は同じ周期の Fourier 級数として表わすことができる．このばあい，前者を後者の共役 Fourier 級数という．これを定義として述べておこう．

〔定義 2〕 周期超関数 $f(x)$ の Hilbert 変換すなわち共役超関数を $f^*(x) = \mathcal{H}f(x)$ とする．このばあい，$f^*(x)$ の Fourier 級数を $f(x)$ の Fourier 級数の**共役 Fourier 級数**という．

これからただちにつぎの定理が得られる．

[定理 11] 周期 l の周期超関数 $f(x)$ は

$$f(x) = f_0(x)H(x\,;x_0, x_0+l) \tag{4.1}$$

$$= f_0(x)*\delta(x, l) \tag{4.2}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{nJx/l} \tag{4.3}$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2\pi nx}{l} + b_n \sin\frac{2\pi nx}{l}\right) \tag{4.4}$$

の形に表わされる．これに対してその共役 Fourier 級数は

$$f^*(x) = \mathscr{H}f(x) \tag{4.5}$$

$$= -\frac{1}{l} f_0(x) * \cot\frac{\pi x}{l} \tag{4.6}$$

$$= i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} n \, c_n e^{n j x/l} \tag{4.7}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-a_n \sin\frac{2\pi n x}{l} + b_n \cos\frac{2\pi n x}{l} \right) \tag{4.8}$$

で与えられる．ただし，$a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$ である．

（証明）(4.1)～(4.4) の表示はすでにおなじみのものである．$f_0(x)$ は $f(x)$ を 1 周期だけ考えた超関数であって，もちろん中央超関数である．

まず，(4.2) を (4.5) に代入すれば

$$f^*(x) = \mathscr{H}\{f_0(x) * \delta(x, l)\}.$$

さて，(3.15) により，$\delta(z, l) = \text{G.F.}\, \delta(x, l)$ は定理 9 の $F_2(z)$ の条件を満たす．したがって

$$f^*(x) = f_0(x) * \mathscr{H}\delta(x, l)$$

$$= -\frac{1}{l} f_0(x) * \cot\frac{\pi x}{l}.$$

ただし，(3.13) を使った．これは (4.6) である．

つぎに，(4.3) を (4.5) に代入して (3.9) を使えば，ただちに (4.7) が得られる．

(4.7) を三角関数を使って表わしたものが (4.8) である．∎

(4.4) と (4.8) を比較すると，“Fourier 級数の cos の係数の符号を変えたものを sin の係数とし，sin の係数をそのまま cos の係数としたものが共役 Fourier 級数である”ということができる．そこで，なにかある周期超関数 $f(x)$ が与えられたとき，その共役 Fourier 級数を求めるにはつぎのようにすればよいことがわかる．もし $f(x)$ がすでに Fourier 級数として与えられているならば，単に上のような置きかえをすればよい．もし $f(x)$ が周期超関数であることだけがわかっているならば，まず Fourier 級数を求め，その後，上述の置きかえをするのが 1 つの方法である．しかし，第 2 の方法として，(4.6) の関係を使って，積分によって（たたみこみは積分である！）直接 $f^*(x)$ を求めることができる．（しかも $f_0(x)$ の性質により，その積分は x について 1 周期だけ行なえばよい．）とくに $f(x)$ が数値的に与えられているばあいには，この第 2 の方法

が推奨される．

周期超関数に対しては定理 7 の (3.2), (3.3) の関係はつぎのように言い表わされる．

[定理 12]　$f_\pm(x,l)$ はそれぞれ上あるいは下超関数で，かつ周期 l の周期超関数であるとする．このとき

$$\mathrm{Re} f_\pm(x,l) = \mp\frac{1}{l}\,\mathrm{Im} f_\pm(x) * \cot\frac{\pi x}{l} + a_0, \tag{4.9}$$

$$\mathrm{Im} f_\pm(x,l) = \pm\frac{1}{l}\,\mathrm{Re} f_\pm(x) * \cot\frac{\pi x}{l} + b_0 \tag{4.10}$$

の関係が成り立つ．ただし，$f_\pm(x)$ は $f_\pm(x,l)$ を 1 周期だけ考えた超関数である．また $f_\pm(x,l)$ の Fourier 展開の定数項を $c_0=a_0+ib_0$ とする．

（証明）　周期超関数 $f(x,l)$ は一般に

$$f(x,l) = c_0 + \Big[\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{nJx/l}\Big]_+ + \Big[\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-nJx/l}\Big]_-$$

と表わされるから，

$$f_\pm(x,l) = c_0 + \Big[\sum_{n=1}^{\infty} c_{\pm n} e^{\pm nJx/l}\Big]_\pm$$

の形に表わされる（複号同順）．

まず，$c_0=0$ のばあいを考えると，$\mathrm{Im}\, z\to\pm\infty$ に対して $e^{\pm nJz/l}\to 0$ であるから $f_\pm(x,l)$ は定理 7 の条件を満たす．$\mathrm{Re} f_\pm(x,l)$，$\mathrm{Im} f_\pm(x,l)$ はともに周期 l の周期超関数であるから，(3.2), (3.3) の左辺を定理 11 の (4.5), (4.6) の関係によって変形することができる．その結果を書き直したものが (4.10), (4.9) の $c_0=0$ のばあいである．つぎに $f_\pm(x,l)-c_0$ を上の $f_\pm(x,l)$ の代りに使い，$\mathscr{H}1=0$ を考慮すればよい．∎

§5.　Hilbert 変換の計算

Hilbert 変換の計算に当って役立つ諸性質を定理としてまとめておこう．

[定理 13]　Hilbert 変換 $\mathscr{H}f(x)=h(x)$ に対してつぎの関係が成り立つ．

$$\mathscr{H}f'(x) = h'(x), \tag{5.1}$$

$$\mathscr{H}f(ax+b) = \mathrm{sgn}\, a\, h(ax+b). \tag{5.2}$$

ただし，a, b は実数とする．

（証明）　Hilbert 変換が‘$-1/\pi x$ とのたたみこみ’であることを思い出せば，

定理 13.14, 定理 13.16 が それぞれ (5.1), (5.2) を与えることが 容易にわかる. ▮

[定理 14] つぎの関係が成り立つ.

$$\mathscr{H}\{(x-a)^n f(x)\} = (x-a)^n \mathscr{H}f(x) + \sum_{p=1}^{n} c_p (x-a)^{n-p}, \tag{5.3}$$

ただし

$$c_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(x-a)^{p-1}dx. \tag{5.4}$$

(証明) まず, $a=0$ のばあいを証明する. そして, $n=1$ のばあいを考える.

定理 13.15 によれば, 2つの超関数 $f_1(x)$, $f_2(x)$ に対して

$$x\{f_1(x)*f_2(x)\} = \{xf_1(x)\}*f_2(x) + f_1(x)*\{xf_2(x)\}$$

が成り立つ. ここで, $f_1(x)\to f(x)$, $f_2(x)\to -1/\pi x$ とすると

$$x\mathscr{H}f(x) = \mathscr{H}\{xf(x)\} - \frac{1}{\pi}f(x)*1$$

となる. $f(x)*1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ であるから, 上式は

$$\mathscr{H}\{xf(x)\} = x\mathscr{H}f(x) + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \tag{5.5}$$

と書きかえられる. これは (5.3) の $a=0$, $n=1$ のばあいである.

一般の n のばあいを得るには数学的帰納法を使えばよい. すなわち, (5.5) の $f(x)$ の代りに $x^n f(x)$ を用いると

$$\mathscr{H}\{x^{n+1}f(x)\} = x\mathscr{H}\{x^n f(x)\} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)x^n dx \tag{5.6}$$

であるが, 右辺の 第1項を (5.3) によって 変形すると, けっきょく (5.6) は (5.3) で $n\to n+1$ としたものになるのである.

$a\neq 0$ のばあいを得るには,

$$\mathscr{H}\{(x-a)^n f(x-a)\} = \{\mathscr{H}x^n f(x)\}(x-a) \qquad \because\ (5.2)$$

の関係を使い, 最後に $f(x-a)\to f(x)$ とおきかえればよい. ▮

[定理 15] $f(x)$ が $z\to\infty$ で 0 になる標準母関数をもつならば, $|x|\to\infty$ のとき

$$\mathscr{H}f(x)\to 0 \tag{5.7}$$

である.

(証明) 仮定により $f(x)=\text{H.F.}\,\tilde{F}(z)$ で, $z\to\infty$ のとき $\tilde{F}(z)\to 0$ である. ところが, 定理2によれば

$$\mathscr{H}f(x) = 2i\,\mathrm{H.F.}\{\tilde{F}(z)\mathbf{1}(z)\}. \tag{5.8}$$

したがって，$|x|\to\infty$ のとき $\mathscr{H}f(x)\to 0$ である．∎

[定理 16] $f(x)$ が標準母関数 $\tilde{F}(z)$ をもつならば

$$f(x) = [\tilde{F}(x)]_+ - [\tilde{F}(x)]_-, \tag{5.9}$$

$$\mathscr{H}f(x) = i\{[\tilde{F}(x)]_+ + [\tilde{F}(x)]_-\}, \tag{5.10}$$

$$(1\mp i\mathscr{H})f(x) = \pm 2[\tilde{F}(x)]_\pm \tag{5.11}$$

が成り立つ．

（証明）(5.9) は (7.3.2) 式にほかならない．すなわち，$\tilde{F}(z)$ が標準母関数でなくても，母関数でありさえすれば成り立つ関係である．(5.8) の右辺を

$$2\tilde{F}(z)\mathbf{1}(z) = \tilde{F}(z)\mathbf{1}_+(z) + \tilde{F}(z)\mathbf{1}_-(z)$$

を使って変形すれば (5.10) が得られる．最後に，(5.10) に $\mp i$ を掛けて (5.9) に加えれば (5.11) が得られる．∎

[定理 17] 母関数 $F(z)$ が実数型，すなわち $F(z)=\bar{F}(z)$ であれば

$$\mathrm{Re}[F(x)]_+ = \mathrm{Re}[F(x)]_-, \tag{5.12}$$

$$\mathrm{Im}[F(x)]_+ = -\mathrm{Im}[F(x)]_- \tag{5.13}$$

の関係が成り立つ．

（証明）定理 7.10 によれば，一般に

$$\overline{[\varphi(x)]_\pm} = [\bar{\varphi}(x)]_\mp \tag{5.14}$$

が成り立つ．いま，$\varphi(z)$ として $F(z)=\bar{F}(z)$ をとり，

$$[F(x)]_\pm = \mathrm{Re}[F(x)]_\pm + i\,\mathrm{Im}[F(x)]_\pm \tag{5.15}$$

のように分解する．これを (5.14) に代入すれば

$$\mathrm{Re}[F(x)]_+ - i\,\mathrm{Im}[F(x)]_+ = \mathrm{Re}[F(x)]_- + i\,\mathrm{Im}[F(x)]_-$$

が得られる．これを実数部と虚数部に分解すれば (5.12), (5.13) が得られる．∎

[定理 18] 母関数を $F(z)=F_r(z)+iF_i(z)$ のように実数型と虚数型の部分に分解すれば，超関数 $f(x)=\mathrm{H.F.}\,F(z)$ は

$$f(x) = \pm 2i\{\mathrm{Im}[F_r(x)]_\pm + i\,\mathrm{Im}[F_i(x)]_\pm\} \tag{5.16}$$

のように表わされる．

（証明）$f(x)$ はつぎのように変形できる．

$$\begin{aligned} f(x) &= [F(x)]_+ - [F(x)]_- \qquad \because\ (7.3.2) \\ &= [F_r(x)]_+ - [F_r(x)]_- + i\{[F_i(x)]_+ - [F_i(x)]_-\} \\ &= \pm 2i\{\mathrm{Im}[F_r(x)]_\pm + i\,\mathrm{Im}[F_i(x)]_\pm\}. \end{aligned}$$

ただし，$F_r(z)$, $F_i(z)$ がともに実数型の解析関数であることを考慮して，定理17を適用した．∎

上に見て来たように，Hilbert 変換 $\mathscr{H}f(x)$ と標準母関数 $\tilde{F}(z)$ との間には密接な関係がある．しかも $z\to\infty$ のときの $\tilde{F}(z)$ の性質が重要な意味をもつのである．

[定理 19] 超関数 $f(x)$ が標準母関数 $\tilde{F}(z)$ をもつならば

$$\mathscr{H}f(x)=2i\{\mathrm{Re}\,[\tilde{F}_r(x)]_\pm+i\,\mathrm{Re}\,[\tilde{F}_i(x)]_\pm\} \tag{5.17}$$

である．ただし $\tilde{F}_r(z), \tilde{F}_i(z)$ はそれぞれ $\tilde{F}(z)$ の実数型および虚数型の成分とする．すなわち

$$\tilde{F}(z)=\tilde{F}_r(z)+i\tilde{F}_i(z). \tag{5.18}$$

（証明） $\tilde{F}(z)$ を定理16の (5.10) 式に代入し，定理17を適用すればよい．∎

注意 (5.18) の形から $F_r(z)$, $F_i(z)$ が実数であると早合点してはいけない．これらは**実数型**の解析関数である．たとえば $1/z$ は実数型であるが，それから導かれる超関数

$$\left[\frac{1}{x}\right]_\pm=\frac{1}{x}\mp\pi i\delta(x)$$

は実数部と虚数部とを両方とももつのである．

超関数 $f(x)$ とその共役超関数 $\mathscr{H}f(x)$ が（標準）母関数の実数型および虚数型成分によって具体的に与えられるというのが定理18，定理19の意味である．

§6. Hilbert 変換の公式

前節の諸定理を応用して Hilbert 変換の具体的な公式をいくつか求めてみよう．これらの公式は，次章で議論する Poisson–Schwarz の積分公式で基礎的な役割をするほか，Hilbert 変換に関連する積分方程式のとり扱いに利用されるものである．標準母関数と Hilbert 変換の関係，つまり定理16が計算の基礎になる．

例 2 つぎの Hilbert 変換の公式が成り立つ．

$$\mathscr{H}\delta^{(m)}(x)=(-1)^{m+1}\frac{m!}{\pi}\frac{1}{x^{m+1}},$$

$$\mathscr{H}|x|^\alpha H(\pm x)=\mp\mathrm{cosec}\,\pi\alpha|x|^\alpha\{\cos\pi\alpha H(\pm x)+H(\mp x)\},\quad (\mathrm{Re}\,\alpha<0)$$

$$\mathscr{H}|x|^\alpha=\tan(\pi\alpha/2)|x|^\alpha\,\mathrm{sgn}\,x,\quad (\mathrm{Re}\,\alpha<1)$$

$$\mathscr{H}|x|^\alpha\,\mathrm{sgn}\,x=-\cot(\pi\alpha/2)|x|^\alpha,\quad (\mathrm{Re}\,\alpha<0)$$

$$\mathscr{H}\left\{\frac{1}{x^m}H(\pm x)\right\}=\mp\frac{1}{\pi}\frac{1}{x^m}\log|x|-\frac{\pi}{2}\frac{(-1)^m}{\Gamma(m)}\delta^{(m-1)}(x),$$

$$\mathscr{H}\frac{1}{x^m} = -\pi\frac{(-1)^m}{\Gamma(m)}\delta^{(m-1)}(x),$$

$$\mathscr{H}\left\{\frac{1}{x^m}\operatorname{sgn} x\right\} = -\frac{2}{\pi}\frac{1}{x^m}\log|x|,$$

$$\mathscr{H}\left\{\frac{1}{x^m}\log|x|H(\pm x)\right\} = \mp\left\{\frac{1}{2\pi}\frac{1}{x^m}(\log|x|)^2 - \frac{\pi}{2}\frac{1}{x^m}H(\pm x)\right\},$$

$$\mathscr{H}\left\{\frac{1}{x^m}\log|x|\right\} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{x^m}\operatorname{sgn} x,$$

$$\mathscr{H}\left\{\frac{1}{x^m}\log|x|\operatorname{sgn} x\right\} = -\frac{1}{\pi}\frac{1}{x^m}(\log|x|)^2 + \frac{\pi}{2}\frac{1}{x^m}.$$

ただし，α は非整数，m は正の整数である．これらの証明は読者にまかせる．

ヒント　母関数がすべて標準母関数であることに注意して，定理 16 を適用すればよい．ただ，$\mathscr{H}|x|^\alpha$ については，$0 \leqq \operatorname{Re}\alpha < 1$ のばあい，標準母関数は $\operatorname{Im} z \to \pm 0$ のとき 0 にならないことに注意してほしい．それでも定理 16 は成り立つのである．

〔定義 3〕　$a<b$ として，区間 (a, b) に関する Heaviside 型の超関数をつぎのように定義する．

$$H(x; a, b) \equiv H(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \mathscr{P}_a^b 1, \tag{6.1}$$

$$\overline{H}(x; a, b) \equiv \overline{H}(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathscr{P}_{-\infty}^a + \mathscr{P}_b^\infty)1, \tag{6.2}$$

$$\operatorname{sgn}(x; a, b) \equiv \operatorname{sgn}(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (-\mathscr{P}_{-\infty}^a + \mathscr{P}_b^\infty)1. \tag{6.3}$$

ただし，変数 x が明らかなばあいはこれを省略して書く．

〔定理 20〕　つぎの関係が成り立つ．

$$H(x; a, b) = H(x-a) - H(x-b), \tag{6.4}$$

$$\overline{H}(x; a, b) = 1 - H(x; a, b) = H(x-b) + H(a-x), \tag{6.5}$$

$$\operatorname{sgn}(x; a, b) = H(x-b) - H(a-x). \tag{6.6}$$

（証明）　定義から明らかである．∎

例 3　つぎの結果を導け．

$$\text{G.}\widetilde{\text{F}}.\, H(x; a, b) = H(z-a) - H(z-b)$$

$$= -\frac{1}{j}\operatorname{Log}\frac{z-a}{z-b}, \tag{6.7}$$

$$\text{G.}\widetilde{\text{F}}.\, \overline{H}(x; a, b) = H(z-b) - H(a-z)$$

$$= 1(z) + \frac{1}{j}\operatorname{Log}\frac{z-a}{z-b}, \tag{6.8}$$

$$\text{G.F.}\, \operatorname{sgn}(x; a, b) = H(z-b) + H(a-z). \tag{6.9}$$

(6.4) からただちに

$$\begin{aligned}\text{G.F. } H(x;a,b) &= H(z-a)-H(z-b)\\ &= \{\mathbf{1}(z)+H(a-z)\}-\{\mathbf{1}(z)+H(b-z)\}\\ &= -\frac{1}{j}\{\mathrm{Log}(z-a)-\mathrm{Log}(z-b)\}\\ &= -\frac{1}{j}\mathrm{Log}\frac{z-a}{z-b}.\end{aligned}$$

すなわち (6.7) である．ただし，$\mathbf{1}(z)=H(z)-H(-z)$, $H(-z)=-j^{-1}\mathrm{Log}\,z$ の関係を使う．$z\to\infty$ のとき

$$\mathrm{Log}\frac{z-a}{z-b}=\mathrm{Log}\frac{1-a/z}{1-b/z}\to 0$$

であるから，定理 10.3 により (6.7) は実は標準母関数である．(6.8), (6.9) についても同様である．あるいは，(6.5) を考慮して，$\mathrm{G.\widetilde{F}}.\,1=\mathbf{1}(z)$ を使えば，(6.7) からただちに (6.8) が得られる．ただ注意すべきは，(6.9) が標準母関数ではないことである．実際，$\mathrm{sgn}(x;a,b)$ は標準母関数をもたないのである．

例 4　つぎの結果を導け．

$$\mathcal{H}H(x;a,b)=-\frac{1}{\pi}\log\left|\frac{x-a}{x-b}\right|, \tag{6.10}$$

$$\mathcal{H}\{x^nH(x;a,b)\}=-\frac{1}{\pi}\left\{x^n\log\left|\frac{x-a}{x-b}\right|-\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}(b^p-a^p)x^{n-p}\right\}. \tag{6.11}$$

定理 16 を使う．すなわち，(6.7) を (5.10) に代入すると

$$\mathcal{H}H(x;a,b)=i\{[H(x-a)]_++[H(x-a)]_-\}-i\{[H(x-b)]_++[H(x-b)]_-\}.$$

ところが，(7.2.10) により

$$[H(x)]_\pm=\pm\frac{1}{2}H(x)-\frac{1}{j}\log|x|.$$

これを上の式に入れると (6.10) が得られる．

つぎに，定理 14 を使う．すなわち，(5.4) で $a=0$, $f(x)=H(x;a,b)$ とおくと，

$$c_p=\frac{1}{\pi}\int_a^b x^{p-1}dx=\frac{1}{\pi p}(b^p-a^p).$$

これと (6.10) を (5.3) に入れれば (6.11) が得られる．

例 5　$$Q(z)=\{(z-a)(z-b)\}^{1/2},\quad a<b \tag{6.12}$$

とすればつぎの結果が成り立つ．

$$\mathrm{G.\widetilde{F}}.\left\{\frac{1}{|Q(x)|}H(x;a,b)\right\}=\frac{i}{2Q(z)}, \tag{6.13}$$

$$\mathcal{H}\left\{\frac{1}{|Q(x)|}H(x;a,b)\right\}=-\frac{1}{|Q(x)|}\mathrm{sgn}(x;a,b), \tag{6.14}$$

$$(1\mp i\mathcal{H})\left\{\frac{1}{|Q(x)|}H(x;a,b)\right\}=\pm i\left[\frac{1}{Q(x)}\right]_\pm, \tag{6.15}$$

$$\mathrm{G.\widetilde{F}}.\{|Q(x)|H(x;a,b)\}=-\frac{i}{2}\left\{Q(z)-z+\frac{1}{2}(a+b)\right\}, \tag{6.16}$$

$$\mathscr{H}\{|Q(x)|H(x;a,b)\}=|Q(x)|\operatorname{sgn}(x;a,b)-x+\frac{1}{2}(a+b), \tag{6.17}$$

$$(1\mp i\mathscr{H})\{|Q(x)|H(x;a,b)\}=\mp i\left\{[Q(x)]_\pm-x+\frac{1}{2}(a+b)\right\}, \tag{6.18}$$

$$\mathscr{H}\left\{\frac{(x-a)^n}{|Q(x)|}H(x;a,b)\right\}=-\frac{(x-a)^n}{|Q(x)|}\operatorname{sgn}(x;a,b)+\sum_{p=1}^{n}\frac{\Gamma(p-1/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(p)}(b-a)^{p-1}(x-a)^{n-p}, \tag{6.19}$$

$$\mathscr{H}\left\{\frac{(x-b)^n}{|Q(x)|}H(x;a,b)\right\}=-\frac{(x-b)^n}{|Q(x)|}\operatorname{sgn}(x;a,b)+\sum_{p=1}^{n}\frac{\Gamma(p-1/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(p)}(a-b)^{p-1}(x-b)^{n-p}. \tag{6.20}$$

これらの結果を導くには，まず $Q(z)$ が区間 (a,b) を除いた z 平面の全領域で 1 価正則であることに注意する．$z\to\infty$ のとき

$$Q(z)=z\left(1-\frac{a}{z}\right)^{1/2}\left(1-\frac{b}{z}\right)^{1/2}=z\left\{1-\frac{a+b}{2z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right\}. \tag{6.21}$$

したがって $1/Q(z)\to 0\ (z\to\infty)$ であるから，$1/Q(z)$ は標準母関数になり得る．x 軸上での $1/Q(z)$ の値を考えると，容易につぎの結果が得られる．

$$\left[\frac{1}{Q(x)}\right]_\pm=\frac{1}{|Q(x)|}\operatorname{sgn}(x;a,b)\mp i\frac{1}{|Q(x)|}H(x;a,b). \tag{6.22}$$

これを定理 16 と比較すれば，ただちに (6.13)～(6.15) が得られる．

つぎに，$Q(z)$ 自身は $z\to\infty$ のとき ∞ になるから，標準母関数には一般になり得ない．そこで

$$Q_1(z)\equiv Q(z)-z+\frac{a+b}{2}$$

を考えると，(6.21) により，これは標準母関数になり得る．しかも

$$Q_1(z)\cong Q(z)$$

である．x 軸上での値を考えると，

$$[Q_1(x)]_\pm=[Q(x)]_\pm-x+\frac{a+b}{2},$$

$$[Q(x)]_\pm=|Q(x)|\operatorname{sgn}(x;a,b)\pm i|Q(x)|H(x;a,b).$$

そこで，$Q_1(z)$ について上の $1/Q(z)$ と同様のとり扱いをすると，(6.16)～(6.18) が得られる．

(6.19), (6.20) を導くには定理 14 を使えばよい．ただし，その際，公式：

$$\int_a^b(x-a)^{p-1}(b-x)^{q-1}dx=(b-a)^{p+q-1}\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{6.23}$$

を使う．詳しくは読者にまかせる．

例 6 つぎの結果を導け.

$$\mathscr{H}\left\{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}H(x;-1,1)\right\}=-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\operatorname{sgn}(x;-1,1) \tag{6.24}$$

$$\mathscr{H}\left\{\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}H(x;-1,1)\right\}$$
$$=-\frac{x^n}{\sqrt{x^2-1}}\operatorname{sgn}(x;-1,1)+\sum_{p=1}^{N}\frac{\Gamma(p-1/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(p)}x^{n+1-2p}. \tag{6.25}$$

ただし $N=[(n+1)/2]$. $[x]$ はいわゆる **Gauss の記号**で, 'xを超えない最大の整数' を表わす.

ヒント $Q(z)\equiv z^n(z^2-1)^{-1/2}=z^{n-1}(1-z^{-2})^{-1/2}$ について例5と同様のとり扱いをする.

例 7 $Q(z)=\{(z-a)(z-b)\}^{1/2}$, $a<b$ のとき, つぎの結果を導け.

$$\mathscr{H}\left\{\frac{1}{x}\frac{1}{|Q(x)|}H(x;a,b)\right\}=\frac{\pi}{\sqrt{|ab|}}\delta(x)-\frac{1}{x}\frac{1}{|Q(x)|}\operatorname{sgn}(x;a,b), \tag{6.26}$$

$$\mathscr{H}\left\{\frac{|Q(x)|}{x}H(x;a,b)\right\}=\pi\sqrt{|ab|}\delta(x)-1+\frac{|Q(x)|}{x}\operatorname{sgn}(x;a,b). \tag{6.27}$$

ヒント $F(z)=z^{-1}[Q(z)]^{-1}$, $F(z)=z^{-1}Q(z)-1$ が標準母関数であることに注意せよ.

例 8 $$\mathscr{H}\{\operatorname{sgn}(x-c)H(x;a,b)\}=\frac{1}{\pi}\log\frac{|(x-a)(x-b)|}{(x-c)^2},\quad a<c<b, \tag{6.28}$$

$$\mathscr{H}\{\operatorname{sgn}x\,H(x;-1,1)\}=\frac{1}{\pi}\log|1-x^{-2}|, \tag{6.29}$$

$$\mathscr{H}\{\sin^{-1}x\,H(x;-1,1)\}=\log 2+\log\sqrt{1-x^2}\,H(x;-1,1)$$
$$-\log\{1+(1-x^{-2})^{-1/2}\}\overline{H}(x;-1,1). \tag{6.30}$$

(6.28) を導くには

$$\operatorname{sgn}(x-c)H(x;a,b)=H(x;c,b)-H(x;a,c)$$

の関係に注意して, (6.10) を適用すればよい. (6.29) は (6.28) の特別なばあいである. (6.30) を導くには,

$$F(z)=\operatorname{Log}\frac{z+\sqrt{z^2-1}}{2z}=\int_\infty^z\left(\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}-\frac{1}{z}\right)dz$$

が標準母関数になり得ることを利用すればよい. 詳しくは読者にまかせる.

例 9 つぎの結果を導け.

$$\mathscr{H}\left\{\frac{\log|x|}{\sqrt{1-x^2}}H(x;-1,1)\right\}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\sin^{-1}x-\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}x\right)H(x;-1,1)$$
$$+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\log(1+\sqrt{1-x^{-2}})\operatorname{sgn}(x;-1,1), \tag{6.31}$$

$$\mathscr{H}\{\sqrt{1-x^2}\log|x|H(x;-1,1)\}$$
$$=x\log 2-\sqrt{1-x^2}\left(\sin^{-1}x-\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}x\right)H(x;-1,1)$$
$$-\sqrt{x^2-1}\log(1+\sqrt{1-x^{-2}})\operatorname{sgn}(x;-1,1). \tag{6.32}$$

ヒント　$F(z)=(z^2-1)^{-1/2}\operatorname{Log}\dfrac{z+(z^2-1)^{1/2}}{2z}$,　$F(z)=(z^2-1)^{1/2}\operatorname{Log}\dfrac{z+(z^2-1)^{1/2}}{2z}$
が標準母関数であることに注意せよ．

例 10　p, q は整数で，$p+q\geqq 0$ とする．このとき $S(z)=(z-a)^{-(p+1/2)}(z-b)^{-(q+1/2)}$ とすれば

$$\mathscr{H}\{|S(x)|H(x;a,b)\}=(-1)^{q+1}|S(x)|\begin{cases}\operatorname{sgn}(x;a,b), & p+q=\text{偶数}\\ \overline{H}(x;a,b), & p+q=\text{奇数}\end{cases} \tag{6.33}$$

である．証明は読者にまかせる．

例 11　つぎの結果を導け．

$$\text{G.F.}\,\frac{1}{x^{m+1}}H(x-a)=\frac{1}{z^{m+1}}\left[H(z-a)+\frac{1}{j}\left\{\log|a|-\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}\left(\frac{z}{a}\right)^n\right\}\right], \tag{6.34}$$

$$\mathscr{H}\frac{1}{x^{m+1}}H(x-a)=-\frac{1}{\pi x^{m+1}}\left\{\log|x-a|-\log|a|+\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{a}\right)^n\right\}$$
$$+(-1)^m\frac{\pi H(-a)}{m!}\delta^{(m)}(x), \tag{6.35}$$

$$\mathscr{H}\frac{1}{x^{m+1}}H(x;a,b)=\frac{1}{\pi x^{m+1}}\left\{\log\left|\frac{x-b}{x-a}\right|+\log\left|\frac{a}{b}\right|-\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a^n}-\frac{1}{b^n}\right)x^n\right\}$$
$$+\frac{(-1)^m}{m!}\pi\,\delta^{(m)}(x),\quad a<0<b \tag{6.36}$$

ただし，$m=0,1,2,\cdots$．

まず，$a>0$ のばあいを考える．このとき $f(x)=x^{-(m+1)}H(x-a)$ の特異点は $x=a$ だけである．$x=0$ は見掛上は特異点であるが，実際は $f(x)=0$, $x<a$ である．さて，(6.34) の右辺を $F(z)$ とおこう．$z=0$ の近くで

$$H(z-a)=-\frac{1}{j}\operatorname{Log}(a-z)=-\frac{1}{j}\left\{\log a+\operatorname{Log}\left(1-\frac{z}{a}\right)\right\}$$
$$=-\frac{1}{j}\left\{\log a-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{z}{a}\right)^n\right\}$$

であるから，$F(z)$ は $z=0$ の近くでたしかに正則である．また，$z=a$ の近くでは，$F(z)\cong z^{-(m+1)}H(z-a)$ である．さらに，$z\to\infty$ のとき $F(z)\to 0$ である．したがって $F(z)$ は $x^{-(m+1)}H(x-a)$ の標準母関数である．

つぎに，$a<0$ のばあいには，

$$H(z-a)=1(z)+H(a-z)$$

の関係を考慮して

$$F(z)=\frac{1}{z^{m+1}}1(z)+\frac{1}{z^{m+1}}\left[H(a-z)+\frac{1}{j}\left\{\log|a|-\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}\left(\frac{z}{a}\right)^n\right\}\right] \tag{6.37}$$

と書きかえる．

$$H(a-z)=-\frac{1}{j}\operatorname{Log}(z-a)=-\frac{1}{j}\left\{\log(-a)+\operatorname{Log}\left(1-\frac{z}{a}\right)\right\}$$
$$=-\frac{1}{j}\left\{\log|a|-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{z}{a}\right)^n\right\}$$

であるから，(6.37) の右辺の第 2 項は $z=0$ で正則である．また，それは $z=a$ の近くでは $z^{-(m+1)}H(a-z)$ と同等である． さらに，$z\to\infty$ のとき $F(z)\to 0$. したがって，$F(z)$ は標準母関数であって，

$$\text{H.F. } F(z) = \frac{1}{x^{m+1}} - \frac{1}{x^{m+1}}H(a-x) = \frac{1}{x^{m+1}}H(x-a).$$

これで (6.34) が証明された．

(6.34) から (6.35) を導くには，

$$[H(x-a)]_{\pm} = \pm\frac{1}{2}H(x-a) - \frac{1}{j}\log|x-a|, \quad \because \ (7.2.10)$$

$$H[(a-x)]_{\pm} = \mp\frac{1}{2}H(a-x) - \frac{1}{j}\log|x-a| \quad \because \ (7.2.11)$$

の関係に注意する．すなわち，$a>0$ に対しては

$$[F(x)]_{\pm} = \frac{1}{x^{m+1}}\left\{\pm\frac{1}{2}H(x-a) - \frac{1}{j}\log|x-a|\right\} + \frac{1}{jx^{m+1}}\left\{\log|a| - \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{a}\right)^n\right\}$$

である．これから (6.35) が得られる．$a<0$ のばあいには，$F(z)$ に対する (6.37) の表式を使えばよい．詳しくは読者にまかせる．

(6.36) を導くには，

$$\frac{1}{x^{m+1}}H(x;a,b) = \frac{1}{x^{m+1}}H(x-a) - \frac{1}{x^{m+1}}H(x-b)$$

に対して (6.35) を適用すればよい．

例 12 つぎの関係が成り立つ．

$$\begin{aligned}&\mathscr{H}\{\log|x|H(x;a,b)\}\\ &= -\frac{1}{\pi}\Big[L\Big(\frac{x}{b}\Big) - L\Big(\frac{x}{a}\Big) - \frac{\pi^2}{2}\{H(bx)-H(ax)\}\\ &\quad + \log|a|\log|x-a| - \log|b|\log|x-b| - \frac{1}{2}\{(\log|a|)^2 - (\log|b|)^2\}\Big]\{H(x;a,b)\\ &\quad - \frac{1}{\pi}\Big[L\Big(\frac{a}{x}\Big) - L\Big(\frac{b}{x}\Big) + \log|a|\log\Big(1-\frac{a}{x}\Big) - \log|b|\log\Big(1-\frac{b}{x}\Big)\Big]\overline{H}(x;a,b),\end{aligned} \quad (6.38)$$

$$\begin{aligned}&\mathscr{H}\{\log|x|H(x;-1,1)\}\\ &= -\frac{1}{\pi}\Big\{L(x) - L(-x) - \frac{\pi^2}{2}\operatorname{sgn} x\Big\}H(x;-1,1)\\ &\quad + \frac{1}{\pi}\Big\{L\Big(\frac{1}{x}\Big) - L\Big(-\frac{1}{x}\Big)\Big\}\overline{H}(x;-1,1).\end{aligned} \quad (6.39)$$

ただし

$$L(z) = -\int_0^z \frac{\mathrm{Log}(1-t)}{t}dt \quad (6.40)$$

は **Euler の 2 対数関数** (dilogarithm) とよばれる関数であって，⌉

$$L(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2},\quad |z|<1$$
$$L(z)+L(1-z)=-\mathrm{Log}\,z\,\mathrm{Log}(1-z)+L(1),$$
$$L(z)+L(-z)=\frac{1}{2}L(z^2),$$
$$L(z)+L(z^{-1})=-\frac{1}{2}\{\mathrm{Log}(-z)\}^2-L(1),$$
$$L(1)=\frac{\pi^2}{6},\quad L(-1)=-\frac{1}{2}L(1)=-\frac{\pi^2}{12}$$

などの性質をもつ．

ここでは証明は省略する．興味をもたれる読者の演習問題としよう．ただ，(6.38) を微分すれば (6.36) の $m=0$ のばあいが得られることを注意しておこう．

§7. 標準型母関数

以上見てきたように，Hilbert 変換の理論では標準母関数が基本的な役割を演ずる．実際，$\mathscr{H}f(x)$ と $\mathrm{G}.\widetilde{\mathrm{F}}.f(x)$ とは密接不可分の関係にあるのである．ところで，任意に与えられた超関数 $f(x)$ は必ずしも標準母関数をもつとはかぎらない．しかし，定理 7.3 によれば，任意の超関数 $f(x)$ は，適当な母関数 $\hat{F}(z)$ を使うことによって，

$$f(x)=\mathrm{H.F.}\,\hat{F}(z)=[\hat{F}_+(x)]_+-[\hat{F}_-(x)]_- \tag{7.1}$$

のように上超関数と下超関数に分解することができる．このような表現を許す母関数 $\hat{F}(z)$ はいろいろのばあいに便利なので，特に名前をつけておこう．

〔**定義 4**〕 上，下成分がそれぞれ上，下半平面いたるところで正則であるような母関数を**標準型母関数**という．

標準型母関数を表わすのに，記号 $\hat{F}(z)$, $\mathrm{G}.\hat{\mathrm{F}}.f(x)$ などを使う．

標準母関数はもちろん標準型母関数である．任意の超関数 $f(x)$ に対してその標準型母関数 $\hat{F}(z)$ は，定理 7.3 の証明の線に沿って求められる．すなわち，適当な収束因子 $\varphi(z)$ を選び，$f(x)/\varphi(x)$ の標準母関数を求め，これに $\varphi(z)$ を掛ければよい：

$$\mathrm{G}.\hat{\mathrm{F}}.f(x)=\varphi(z)\,\mathrm{G}.\widetilde{\mathrm{F}}.\left\{\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right\}. \tag{7.2}$$

ただし，$f(x)/\varphi(x)$ の標準母関数は

$$\mathrm{G}.\widetilde{\mathrm{F}}.\left\{\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right\}=\left\{\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right\}*\delta(z) \tag{7.3}$$

によって計算される．ここで $\varphi(z)$ は，$z\to\infty$ のとき適当に大きくなり，かつ

x 軸上に零点をもたないような整関数である．（たとえば $(z^2+1)^N$, $e^{az^2}(a>0)$ など．）

標準母関数が（もし存在すれば）一義的にきまるのに対して，標準型母関数はつねに存在する反面，つぎのような不定性がある．

[定理 21] 標準型母関数は整関数を除いて一義的に定まる．

（証明） 超関数 $f(x)$ の任意の 2 つの標準型母関数を $F_1(z), F_2(z)$ とする．$F(z)=F_1(z)-F_2(z)$ とおけば，H.F. $F(z)=f(x)-f(x)=0$ であるから

$$F(z)\equiv[F_+(z), F_-(z)]=\varphi(z).$$

ただし，$\varphi(z)$ は x 軸を含むある領域Dで正則な解析関数である． その領域Dで $F_+(z)=\varphi(z)$, $F_-(z)=\varphi(z)$ であるが，仮定により $F_+(z)$, $F_-(z)$ はそれぞれ上および下半平面で正則であるから，解析接続により，領域Dは実は全平面であることがわかる．したがって $\varphi(z)=F(z)$ は整関数である．▮

標準型母関数は (7.2), (7.3) によって具体的に計算することができる．しかし，実際上は，つぎのほとんど自明の定理を使って計算できるばあいが多い．

[定理 22] 標準型母関数の微分は標準型母関数である．

（証明） 超関数の微分の定義により，$\hat{F}(z)=$G.$\hat{\text{F}}$.$f(x)$ とすれば，$\hat{F}'(z)=$ G.F. $f'(x)$ である．ところが，$\hat{F}_+(z)$, $\hat{F}_-(z)$ はそれぞれ上，下半平面で正則であるから，$\hat{F}_+'(z)$, $\hat{F}_-'(z)$ もそうである．したがって，$\hat{F}'(z)$ は標準型母関数である．▮

$f(x)$ が標準母関数をもたないばあいでも，n 階微分 $f^{(n)}(x)$ が標準母関数をもつことが明らかなときにはこの定理が役に立つ．すなわち，まず

$$\hat{F}^{(n)}(z)\equiv\text{G.}\tilde{\text{F}}.\ f^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)*\delta(z) \tag{7.4}$$

によって $\hat{F}^{(n)}(z)$ を求め，これを n 回積分すれば $\hat{F}(z)$ が得られるのである．($\hat{F}^{(n)}(z)$ は標準母関数であるが，$\hat{F}(z)$ は単に標準型母関数であって，標準母関数ではない!) 積分の際に $\hat{F}(z)$ の上・下両成分に，$\sum_{p=0}^{n-1}c_pz^p$ (c_p は任意) の形の付加項が現われるが，定理 21 によって，これをまとめて $\sum_{p=0}^{n-1}c_pz^p\mathbf{1}(z)$ とすることができる．係数 c_p は $f(x)=$H.F. $\hat{F}(z)$ の条件からきめればよい．

例 13 例 2.2 で Heaviside 関数 $H(x)$ を超関数として見直すときに母関数 $H(z)=-j^{-1}\,\text{Log}(-z)$ を導入したが，これは標準型の母関数である．その導入のしかたは，上の

(7.2), (7.3) によるものである．もし，$H'(x)=\delta(x)$ の関係をすでに知っているものとすると，$\hat{F}(z)=\mathrm{G.}\hat{\mathrm{F}}.\,H(x)$ は (7.4) によってつぎのように簡単に求められる．

$$\hat{F}'(z) = H'(x)*\delta(z) = \delta(x)*\delta(z)$$
$$= \delta(z) = -\frac{1}{j}\frac{1}{z}.$$
$$\therefore\quad \hat{F}(z) = -\frac{1}{j}\operatorname{Log}(-z)+c\mathbf{1}(z).$$

両辺の H.F. をとれば，ただちに $c=0$ であることがわかる．

例 14 ベキ型超関数 $|x|^{\alpha}(\log|x|)^{n}H(x)$ の定義 4.4 に現われる母関数はすべて標準型である．そして，とくに $\mathrm{Re}\,\alpha<0$ のばあいは標準母関数である．

§8. Hilbert 型変換

超関数 $f(x)$ が標準母関数 $\tilde{F}(z)=\mathrm{G.}\tilde{\mathrm{F}}.f(x)$ をもつばあい，定理 16 により

$$f(x) = [\tilde{F}(x)]_{+} - [\tilde{F}(x)]_{-}, \tag{8.1}$$
$$\mathcal{H}f(x) = i\{[\tilde{F}(x)]_{+} + [\tilde{F}(x)]_{-}\} \tag{8.2}$$

の関係が成り立つ．任意の超関数 $f(x)$ に対しては必ずしも標準母関数 $\tilde{F}(z)$ は存在せず，したがって Hilbert 変換 $\mathcal{H}f(x)$ は存在しないのであるが，標準型母関数 $\hat{F}(z)$ がつねに存在することを考えて，Hilbert 変換に類似の超関数 $\hat{\mathcal{H}}f(x)$ をつぎのように導入することができる．

〔**定義 5**〕 任意の超関数 $f(x)$ に対して，その **Hilbert 型変換**を

$$\hat{\mathcal{H}}f(x) \overset{\mathrm{def}}{=} i\{[\hat{F}(x)]_{+} + [\hat{F}(x)]_{-}\} \tag{8.3}$$

で定義する．ただし，$\hat{F}(z)$ は $f(x)$ の標準型母関数である．

標準型母関数 $\hat{F}(z)$ を使っても，(8.1) と同じ形の関係

$$f(x) = [\hat{F}(x)]_{+} - [\hat{F}(x)]_{-} \tag{8.4}$$

が成り立つことはもちろんである．(8.3) と (8.4) を組み合わせると

$$2[\hat{F}(x)]_{\pm} = (\pm 1 - i\hat{\mathcal{H}})f(x) \tag{8.5}$$

の関係が得られる．

標準型母関数 $\hat{F}(z)$ には整関数だけの不定性があるから，Hilbert 型変換 $\hat{\mathcal{H}}f(x)$ にも整関数だけの不定性が伴なう．しかし，この不定性は実際問題に応用する際に支障はない．超関数 $f(x)$ が Hilbert 変換 $\mathcal{H}f(x)$ をもつばあいには，$\hat{\mathcal{H}}f(x)=\mathcal{H}f(x)+\varphi(x)$，ただし $\varphi(x)$ は任意の整関数，ということになる．

Hilbert 型変換について，つぎの定理が成り立つ．

[定理 23]　$f(x)$を任意の超関数，$\varphi(x)$を任意の整関数とすれば

$$\hat{\mathscr{H}}\{\varphi(x)f(x)\}=\varphi(x)\hat{\mathscr{H}}f(x) \tag{8.6}$$

が成り立つ．また，$\Phi(x)$を$x\to\pm\infty$に対して適当に大きくなる任意の整関数とすれば

$$\hat{\mathscr{H}}f(x)=\Phi(x)\mathscr{H}\left\{\frac{f(x)}{\Phi(x)}\right\} \tag{8.7}$$

が成り立つ．

（証明）　G.$\hat{\mathrm{F}}$.$f(x)=\hat{F}(z)$とすれば，$\varphi(z)\hat{F}(z)$も標準型母関数である．すなわち

$$\mathrm{G}.\hat{\mathrm{F}}.\{\varphi(x)f(x)\}=\varphi(z)\hat{F}(z).$$

定義5により

$$\begin{aligned}\hat{\mathscr{H}}\{\varphi(x)f(x)\}&=i\{[\varphi(x)\hat{F}(x)]_{+}+[\varphi(x)\hat{F}(x)]_{-}\}\\&=i\varphi(x)\{[\hat{F}(x)]_{+}+[\hat{F}(x)]_{-}\}\\&=\varphi(x)\hat{\mathscr{H}}f(x).\end{aligned}$$

ここでふたたび定義5を使った．これで(8.6)が証明された．

つぎに，(8.6)によれば，任意の整関数$\Phi(x)$を使って

$$\begin{aligned}\hat{\mathscr{H}}f(x)&=\hat{\mathscr{H}}\left[\Phi(x)\left\{\frac{f(x)}{\Phi(x)}\right\}\right]\\&=\Phi(x)\hat{\mathscr{H}}\left\{\frac{f(x)}{\Phi(x)}\right\}\end{aligned}$$

と書くことができる．$x\to\pm\infty$に対して適当に大きくなる整関数$\Phi(x)$を選べば，$f(x)/\Phi(x)$がHilbert変換をもつようにすることができる．したがって，上式の右辺の$\hat{\mathscr{H}}$を$\mathscr{H}$でおきかえることができるのである．∎

定理23を応用すれば，Hilbert型変換$\hat{\mathscr{H}}f(x)$を求めようとする際に既知のHilbert変換に帰着させて計算することができる．

例 15　$\varphi(x)$を整関数とすれば

$$\hat{\mathscr{H}}\varphi(x)=\hat{\mathscr{H}}\{\varphi(x)\cdot 1\}=\varphi(x)\hat{\mathscr{H}}1.$$

$\mathscr{H}1=0$は存在するから，整関数の不定性を除いて$\hat{\mathscr{H}}1=0$とすることができる．したがって

$$\hat{\mathscr{H}}\varphi(x)=0. \tag{8.8}$$

もちろん，この式自身，整関数だけの不定性がある．

§9. ま　と　め

超関数$f(x)$のHilbert変換$\mathscr{H}f(x)$を‘$-1/\pi x$とのPたたみこみ’として定

義した．これはふつうの関数に対する Hilbert 変換の自然な拡張になっていて，Cauchy の主値積分のような，いささか‘あいまい’と思えるような概念を含まない定義である．$\mathscr{H}f(x)$ は $f(x)$ の共役超関数とよばれる．とくに $f(x)$ が周期超関数のばあいには，$f(x)$，$\mathscr{H}f(x)$ はともに Fourier 級数として表わされる．このばあい，共役超関数は共役 Fourier 級数とよばれる．すなわち，Fourier 級数の Hilbert 変換が共役 Fourier 級数である．Hilbert 変換の性質を一般的に調べた．とくに重要な事実は，Hilbert 変換の存在が標準母関数の存在と密接不可分の関係にあることである．したがって，標準母関数が知れれば Hilbert 変換がただちに得られるのである．このことを利用して，種々の超関数に対して Hilbert 変換を具体的に求めた．これらはつぎの章で述べる Poisson–Schwarz の積分公式や，積分方程式の解に利用されるものである．

16 Poisson-Schwarz の積分公式

§1. は じ め に

ある領域Dで Laplace の方程式 $\Delta\Phi=0$ を満たし，境界上で Φ あるいは法線微分 $\partial\Phi/\partial n$ が指定された値をとるような Φ を求めることは，境界値問題の典型的な例であって，理工学の多くの問題がこの問題に帰着される．２次元問題では，周知のように，これは，領域Dで正則な解析関数 $F(z)$ を，境界上でその実数部 $\mathrm{Re}\,F$ あるいは虚数部 $\mathrm{Im}\,F$ が指定された値をとるように決定する問題と同等である．領域Dが円あるいは半平面のばあいには，解を具体的に表わす公式が知られている．すなわち，Poisson–Schwarz の積分公式とよばれるものがそれである．この章では，超関数論の立場で，この公式およびこれに関連する事柄を議論しよう．とくに，１つの応用例として，Hilbert 変換に関連する積分方程式をとり扱ってみよう．

§2. 半平面に関する Poisson-Schwarz の積分公式

定理 15.7 の (15.3.2) 式によれば，上(下)超関数の実数部を指定すると虚数部は自動的に決ってしまう．したがって，またその上(下)超関数自身も決定される．これはまさに驚くべき事実といわなければならない．

$\mathrm{Re}\,f_\pm(x)$ を与えて $f_\pm(x)$ を決定する演算の具体的な形を求めてみよう．

まず $f_+(x)$ について考える．$f_+(x)=\mathrm{H.F.}\,\varphi(z)\mathbf{1}_+(z)$ として，$\mathrm{Im}\,z\to+\infty$ のとき $\varphi(z)\to0$ であると仮定しよう．このとき

$$\begin{aligned} f_+(x) &= \mathrm{Re}f_+(x)+i\mathrm{Im}f_+(x) \\ &= \mathrm{Re}f_+(x)-i\mathscr{H}\mathrm{Re}f_+(x) \qquad \because\ (15.3.2) \\ &= (1-i\mathscr{H})\mathrm{Re}f_+(x). \qquad (2.1) \end{aligned}$$

すなわち，$1-i\mathscr{H}$ がその演算である．これはつぎのように変形される．定理 13.6，定義 15.1 はそれぞれ

$$1=*\delta(x),\quad \mathscr{H}=*\left(-\frac{1}{\pi x}\right) \qquad (2.2)$$

を与える．したがって

$$1-i\mathscr{H} = *\left\{\delta(x)+\frac{i}{\pi x}\right\} = *\frac{i}{\pi}\left[\frac{1}{x}\right]_+ = *2[\delta(x)]_+ \tag{2.3}$$

と書ける．ただし，(7.2.7) を使う．けっきょく，(2.1) は

$$f_+(x) = \frac{i}{\pi}\mathrm{Re}f_+(x)*\left[\frac{1}{x}\right]_+ = 2\,\mathrm{Re}f_+(x)*[\delta(x)]_+ \tag{2.4}$$

となる．右辺は超関数と上超関数のたたみこみであるから，定理 13.27 により，上超関数を与えるはずであって，求める $f_+(x)$ が確かに上超関数であることを示すのである．実際，$f_+(x)=\mathrm{H.F.}F(z)$ とすると，(2.4) は

$$\begin{aligned}F(z) &= \frac{i}{\pi}\mathrm{Re}f_+(x)*\mathrm{G.F.}\left[\frac{1}{x}\right]_+\\ &= \frac{i}{\pi}\mathrm{Re}f_+(x)*\frac{1}{z}\mathbf{1}_+(z)\\ &= \varphi(z)\mathbf{1}_+(z),\end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \frac{i}{\pi}\mathrm{Re}f_+(x)*\frac{1}{z}\\ &= \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Re}f_+(x)}{x-z}dx\end{aligned} \tag{2.5}$$

と書けるからである．

つぎに，$\mathrm{Im}\,z\to+\infty$ のとき $\varphi(z)\to c$ のばあいを考える．ただし $c=a+ib$ は定数とする．いま

$$F_1(z) \equiv \varphi(z)\mathbf{1}_+(z)-\frac{1}{2}c-c\mathbf{1}(z)$$

を考えると，$F_{1-}(z)\equiv 0$ で，$\mathrm{Im}\,z\to+\infty$ のとき $F_{1+}(z)\to 0$ である．したがって

$$f_1(x) = \mathrm{H.F.}\,F_1(z) = f_+(x)-c$$

に対して，上で $f(x)$ について議論したことがすべて成り立つ．それゆえ，(2.1) に相当して

$$\begin{aligned}f_+(x)-c &= (1-i\mathscr{H})\{\mathrm{Re}f_+(x)-a\},\\ \therefore\quad f_+(x) &= (1-i\mathscr{H})\mathrm{Re}f_+(x)+ib\end{aligned} \tag{2.1$'$}$$

が成り立つ．ただし，$\mathscr{H}a=0$ を使った．

また，(2.4) に相当して

$$f_+(x) = \frac{i}{\pi}\mathrm{Re}f_+(x)*\left[\frac{1}{x}\right]_+ + ib \tag{2.4$'$}$$

が成り立つ．$f_+(x)$ は上超関数であるから，その母関数は，(2.5) に相当して

$$F(z) = \varphi(z)\mathbf{1}_+(z),$$

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Re} f_+(x)}{x-z} dx + ib \tag{2.5'}$$

で与えられる.

(2.5′) は, x 軸上で実数部が与えられたとき上半面で正則な解析関数を与える公式である. これは関数論で **Poisson–Schwarz の積分公式**として知られているものである.

$f_-(x)$ についても, また $\mathrm{Im} f_\pm(x)$ が与えられたばあいについても, 同様の議論をすることができる. これらを定理としてまとめておこう.

[定理 1] 任意の超関数 $f(x)$ についてつぎの関係が成り立つ.

$$(1 \mp i\mathcal{H}) f(x) = \pm \frac{i}{\pi} f(x) * \left[\frac{1}{x}\right]_\pm = \pm 2 f(x) * [\delta(x)]_\pm. \tag{2.6}$$

すなわち, $1 \mp i\mathcal{H}$ は上(下)超関数をつくる演算子である.

[定理 2] $F_\pm(z)$ はそれぞれ $\mathrm{Im}\, z \gtrless 0$ で正則で, $\mathrm{Im}\, z \to \pm\infty$ のとき定数 $c_\pm = a_\pm + ib_\pm$ になるような解析関数とする. このとき, 上(下)超関数 $f_\pm(x) = \mathrm{H.F.}\{F_\pm(z)\mathbf{1}_\pm(z)\} \equiv [F(x)]_\pm$ についてつぎの関係が成り立つ.

$$f_\pm(x) = (1 \mp i\mathcal{H}) \mathrm{Re} f_\pm(x) + ib_\pm \tag{2.7}$$

$$= \pm \frac{i}{\pi} \mathrm{Re} f_\pm(x) * \left[\frac{1}{x}\right]_\pm + ib_\pm \tag{2.8}$$

$$= \pm 2 \mathrm{Re} f_\pm(x) * [\delta(x)]_\pm + ib_\pm \tag{2.9}$$

$$= (i \pm \mathcal{H}) \mathrm{Im} f_\pm(x) + a_\pm \tag{2.10}$$

$$= \mp \frac{1}{\pi} \mathrm{Im} f_\pm(x) * \left[\frac{1}{x}\right]_\pm + a_\pm \tag{2.11}$$

$$= \pm 2i\, \mathrm{Im} f_\pm(x) * [\delta(x)]_\pm + a_\pm, \tag{2.12}$$

$$F_\pm(z) = \pm \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Re} f_\pm(x)}{x-z} dx + ib_\pm \tag{2.13}$$

$$= \pm \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Im} f_\pm(x)}{x-z} dx + a_\pm, \tag{2.14}$$

$$= \pm 2\, \mathrm{Re} [F(x)]_\pm * \delta(z) + ib_\pm \tag{2.15}$$

$$= \pm 2i\, \mathrm{Im} [F(x)]_\pm * \delta(z) + a_\pm. \tag{2.16}$$

(2.13), (2.14) は**半平面に関する Poisson–Schwarz の積分公式**にほかならない.

§3. 円に関する Poisson-Schwarz の積分公式

周期超関数に対しては上の定理1はつぎのように言い表わすことができる．

[定理 3] 周期 l の周期超関数を $f(x,l)$，これを1周期だけ考えた超関数を $f_0(x)$ とすれば

$$(1\mp i\mathscr{H})f(x,l) = \pm\frac{i}{l}f_0(x)*\left[\cot\frac{\pi x}{l}\right]_\pm \tag{3.1}$$

$$= \pm 2f_0(x)*[\delta(x,l)]_\pm \tag{3.2}$$

が成り立つ．

（証明） (15.4.2) の関係 $f(x,l)=f_0(x)*\delta(x,l)$ を (3.1) の左辺に代入すれば

$$(1\mp i\mathscr{H})f(x,l) = (1\mp i\mathscr{H})\{f_0(x)*\delta(x,l)\}$$
$$= f_0(x)*(1\mp i\mathscr{H})\delta(x,l).$$

ただし，定理15.9を使う．さて，定理15.2により

$$(1\mp i\mathscr{H})\delta(x,l) = \text{H.F.}\{\delta(z,l)\mp i(2i)\delta(z,l)\mathbf{1}(z)\}$$
$$= \text{H.F.}[\delta(z,l)\{1\pm 2\mathbf{1}(z)\}]$$
$$= \text{H.F.}\{\pm 2\delta(z,l)\mathbf{1}_\pm(z)\}$$
$$= \pm 2[\delta(x,l)]_\pm \tag{3.3}$$
$$= \pm\frac{i}{l}\left[\cot\frac{\pi x}{l}\right]_\pm. \tag{3.4}$$

ただし $\delta(z,l)$ に対する (10.7.11) の定義式を使う．(3.3)，(3.4) を上の式に代入すれば，(3.2)，(3.1) が得られる．▌

周期超関数に対して定理2はつぎのように言い表わされる．

[定理 4] $F_\pm(z,l)$ はそれぞれ $\text{Im}\,z \gtrless 0$ で正則で，$\text{Im}\,z\to\pm\infty$ のとき定数 $c_\pm=a_\pm+ib_\pm$ になるような周期 l の周期解析関数とする．このとき，周期上(下)超関数 $f_\pm(x,l)=\text{H.F.}\{F_\pm(z,l)\mathbf{1}_\pm(z)\}$ についてつぎの関係が成り立つ．

$$f_\pm(x,l) = \pm\frac{i}{l}\text{Re}f_\pm(x)*\left[\cot\frac{\pi x}{l}\right]_\pm + ib_\pm \tag{3.5}$$

$$= \mp\frac{1}{l}\text{Im}f_\pm(x)*\left[\cot\frac{\pi x}{l}\right]_\pm + a_\pm, \tag{3.6}$$

$$F_\pm(z,l) = \mp\frac{i}{l}\int_{x_0}^{x_0+l}\text{Re}f_\pm(x)\cot\frac{\pi(x-z)}{l}dx + ib_\pm \tag{3.7}$$

$$= \pm\frac{1}{l}\int_{x_0}^{x_0+l}\text{Im}f_\pm(x)\cot\frac{\pi(x-z)}{l}dx + a_\pm. \tag{3.8}$$

ただし，$f_{\pm}(x,l)$ を 1 周期だけ考えた超関数を $f_{\pm}(x)$ とし，x_0 は $f(x,l)$ の任意の正則点とする．

（証明） $f_{\pm}(x,l)$ が周期超関数であれば，$\mathrm{Re}f_{\pm}(x,l)$, $\mathrm{Im}f_{\pm}(x,l)$ も周期超関数であって，これらを 1 周期だけ考えた超関数はそれぞれ $\mathrm{Re}f_{\pm}(x)$, $\mathrm{Im}f_{\pm}(x)$ である．そこで (2.7), (2.10) に (3.1) の関係を応用すれば，ただちに (3.5), (3.6) が得られる．その母関数の上(下)成分が，(3.7), (3.8) である．∎

もしも $\mathrm{Re}f_{\pm}(x,l)$ あるいは $\mathrm{Im}f_{\pm}(x,l)$ が Fourier 級数として与えられているならば，$f_{\pm}(x,l)$ を Fourier 級数として求めることは極めて簡単である．すなわち，つぎの定理が成り立つ．

[定理 5] $f_{\pm}(x,l)=\mathrm{H.F.}\{F_{\pm}(z,l)\mathbf{1}_{\pm}(z)\}$ とする．このとき

$$\mathrm{Re}f_{\pm}(x,l)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{nj x/l} \tag{3.9}$$

ならば

$$f_{\pm}(x,l)=c_0+2\sum_{n=1}^{\infty}c_{\pm n}e^{\pm nj x/l}, \tag{3.10}$$

$$F_{\pm}(z,l)=c_0+2\sum_{n=1}^{\infty}c_{\pm n}e^{\pm nj z/l} \tag{3.11}$$

である．また，$\mathrm{Im}f_{\pm}(x,l)$ が (3.9) の右辺で与えられているならば，(3.10), (3.11) の右辺を i 倍した公式が成り立つ．

（証明） (2.7) の右辺に (3.9) を代入し，(15.4.7) を使えばよい．詳しくは読者にまかせる．∎

いま

$$Z=e^{jz/l} \tag{3.12}$$

とおけば，z 平面の実数軸（x 軸）は Z 平面の単位円 : $|Z|=1$ に対応し，z 平面の上(下)半平面は Z 平面の単位円の内(外)部の領域に対応する．さて，定理 4 で述べた周期解析関数 $F_{\pm}(z,l)$ は，それぞれ Z 平面の単位円の内(外)部で正則で，したがって Z の昇(降)ベキの級数として表わされる．定理 5 の (3.11) 式はこの事情を具体的に表わしたものである．また，定理 4 の (3.7), (3.8) はそれぞれ実数部および虚数部を単位円周上で与えて，単位円の内(外)部で正則な解析関数を与える公式である．すなわち，**単位円に関する Poisson-Schwarz の積分公式** にほかならない．ただ，強調すべきは，この公式が $\mathrm{Re}f_{\pm}(x,l)$, $\mathrm{Im}f_{\pm}(x,l)$ が超関数のばあいまで拡張されていることである．

§4. Poisson-Schwarz の積分公式の一般化

$F_\pm(z)$ は $\mathrm{Im}\, z \gtrless 0$ で正則で，$\mathrm{Im}\, z \to \pm\infty$ のとき定数 $c_\pm = a_\pm + ib_\pm$ になるような解析関数とすれば

$$F_\pm(z) = \pm 2\,\mathrm{Re}\,[F(x)]_\pm * \delta(z) + ib_\pm \tag{4.1}$$
$$= \pm 2i\,\mathrm{Im}\,[F(x)]_\pm * \delta(z) + a_\pm \tag{4.2}$$

が成り立つ．これは定理2として与えたもので，半平面に関する Poisson-Schwarz の積分公式にほかならない．すなわち，x 軸上で実数部あるいは虚数部を与えて上(下)半平面で正則な解析関数を求める公式である．$[F(x)]_\pm$ は上(下)超関数であって，(4.1), (4.2) はその母関数 G.F. $[F(x)]_\pm = F_\pm(z)\mathbf{1}_\pm(z)$ を与える．そして，超関数 $[F(x)]_\pm$ 自身は (4.1), (4.2) の $\delta(z)$ を

$$[\delta(x)]_\pm = -\frac{1}{j}\left[\frac{1}{x}\right]_\pm = \pm\frac{1}{2}\delta(x) + \frac{i}{2\pi}\frac{1}{x} \tag{4.3}$$

でおきかえた公式で与えられる．たとえば，(4.3) の真中の式を使い，たたみこみの定義を具体的に書き表わすと，(4.1) は

$$F_\pm(z) = \pm\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Re}\,[F(x)]_\pm}{x-z}dx + ib_\pm \tag{4.4}$$

を与える．また，(4.3) の最後の式を使い，

$$f(x)*\delta(x) = f(x),\quad -\frac{1}{\pi x}*f(x) = \mathscr{H}f(x)$$

の関係を想い起こすと，(4.1) から

$$\mathrm{Im}\,[F(x)]_\pm = \mp\mathscr{H}\,\mathrm{Re}\,[F(x)]_\pm + b_\pm \tag{4.5}$$

が得られるのである．

このように，超関数が上(下)超関数であることがわかっていると，その実数部あるいは虚数部を与えるだけで，超関数自身が決定してしまう．実は，もっと一般的に，x 軸のある区域で実数部，残りの区域で虚数部を与えても，上(下)超関数はある意味で確定するのである．このことをつぎに示そう．まず，x 軸の正負の部分がその区域であるという簡単なばあいからはじめよう．

[定理 6] $F_\pm(z)$ は $\mathrm{Im}\, z \gtrless 0$ で正則で，$z\to\infty$ のとき，適当な整数 p に対して $z^{-p}F_\pm(z)$ が有界であるような解析関数とする．このとき

$$F_\pm(z) = 2z^{p+1/2}[\{\mathrm{Im}\,[F(x)]_\pm H(-x) \pm \mathrm{Re}\,[F(x)]_\pm H(x)\}$$
$$\cdot |x|^{-(p+1/2)} * \delta(z)] + iz^{p-1/2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n} \tag{4.6}$$

$$= -2iz^{p+1/2}[\{\mathrm{Re}[F(x)]_{\pm}H(-x) \mp \mathrm{Im}[F(x)]_{\pm}H(x)\} \cdot |x|^{-(p+1/2)} * \delta(z)] + z^{p-1/2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} \tag{4.7}$$

が成り立つ．ただし，a_n, b_n は適当な実数定数とする．

（証明）
$$G_{\pm}(z) \equiv z^{-(p+1/2)}F_{\pm}(z) \tag{4.8}$$

とおけば，仮定により $G_{\pm}(z)$ は $\mathrm{Im}\, z \gtrless 0$ で正則で，かつ $\mathrm{Im}\, z \to \pm\infty$ のとき $G_{\pm}(z) \to 0$ である．さて

$$[G(x)]_{\pm} \equiv [G_{\pm}(x)]_{\pm} = [x^{-(p+1/2)}F_{\pm}(x)]_{\pm}$$
$$= [x^{-(p+1/2)}]_{\pm} \cdot [F(x)]_{\pm} \qquad \because \ \text{上(下)超関数の積}$$

である．ところが，(7.2.12) 式により

$$[x^{-(p+1/2)}]_{\pm} = |x|^{-(p+1/2)}H(x) \mp i|x|^{-(p+1/2)}H(-x). \tag{4.9}$$

この超関数の特異点は $x=0$ だけである．したがって

$$\mathrm{Re}[G(x)]_{\pm} = \{\mathrm{Re}[F(x)]_{\pm}\, H(x) \pm \mathrm{Im}[F(x)]_{\pm}\, H(-x)\}\,|x|^{-(p+1/2)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \delta^{(n)}(x), \tag{4.10}$$

$$\mathrm{Im}[G(x)]_{\pm} = \{\mathrm{Im}[F(x)]_{\pm}\, H(x) \mp \mathrm{Re}[F(x)]_{\pm}\, H(-x)\}\,|x|^{-(p+1/2)} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \delta^{(n)}(x) \tag{4.11}$$

である．ただし，a_n, b_n は実数定数である．(4.10) を得るにはつぎのように考えればよい．まず，$x \neq 0$ に対しては確かに等式が成り立つ．ところが，左辺は $x=0$ を含む全区間で超関数として定義されている．したがって，定理 11.11 により，$x=0$ を含む等式としては，右辺に一般 δ 関数 $\delta_{\infty}(x)$ がつけ加わる．(4.10) の右辺の第 2 項は $\delta_{\infty}(x)$ を具体的に書き表わしたものである．いまのばあい，左辺は実の超関数であるから，a_n は実数でなければならない．

(4.11) もまったく同様の考えで得られる．

さて (4.1) の $\mathrm{Re}[F(x)]_{\pm}$ の代りに (4.10) の $\mathrm{Re}[G(x)]_{\pm}$ を使えば $G_{\pm}(z)$ が得られ，さらに (4.8) を使うと，けっきょく (4.6) が得られるのである．ただし，その際，$\mathrm{Im}\, z \to \pm\infty$ のとき $G_{\pm}(z) \to 0$ であるから，$b_{\pm}=0$ であることに注意する．また，

$$\delta^{(n)}(x) * \delta(z) = \delta(x) * \delta^{(n)}(z) = \delta^{(n)}(z)$$
$$= \frac{d^n}{dz^n}\left(-\frac{1}{jz}\right) = \frac{(-1)^{n+1}n!}{jz^{n+1}}$$

の関係を使う．(4.7) も同様にして得られる．もちろん，(4.6), (4.7) の a_n, b_n は適当な実数定数というだけであって，(4.10), (4.11) の a_n, b_n とは異なる．∎

注意　(4.10), (4.11) の右辺の第1項は，$x \neq 0$ で定義された超関数を，$x=0$ を含む x の全区間に拡張したものである．したがって，定理 11.12 の趣旨によれば，厳密にいえば記号 $\mathcal{P}_{-\infty}^{\infty}$ をつけるべきものである．しかし，その意味は明らかであるから，今後，このようなばあい，$\mathcal{P}_{-\infty}^{\infty}$ を省略することにする．

例 1　つぎの条件を満足する解析関数 $F(z)$ を求めよ．

$$\mathrm{Re}[F(x)]_{\pm} = x^{\alpha}, \quad x>0$$
$$\mathrm{Im}[F(x)]_{\pm} = 0, \quad x<0$$

ただし，α は実数とする．

(4.6) により

$$F_{\pm}(z) = \pm 2z^{p+1/2} \cdot \{|x|^{\alpha-p-1/2}H(x) * \delta(z)\} + iz^{p-1/2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}.$$

$\{\cdots\}$ のたたみこみは正直に計算すればよいが，そうしなくても，定理 13.7 を使えば容易に求められる．すなわち，一般に，超関数 $f(x)$ が標準母関数 $\tilde{F}(z)$ をもつならば，

$$\tilde{F}(z) = f(x) * \delta(z) \tag{4.12}$$

である．そこで，$f(x)=|x|^{\alpha-p-1/2}H(x)$ ととると

$$|x|^{\alpha-p-1/2}H(x) * \delta(z) = \frac{i(-z)^{\alpha-p-1/2}}{2\sin\pi(\alpha-p-1/2)}$$

が得られる．ただし，$\alpha-1/2 \neq$ 整数とし，かつ $\alpha-p-1/2<0$ となるように p を選んでおく．$\mathrm{Im}\, z \gtrless 0$ に応じて $-z=e^{\mp\pi i}z$ であることに注意すれば，けっきょく

$$F_{\pm}(z) = \frac{(-z)^{\alpha}}{\cos\pi\alpha} + iz^{p-1/2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n} \tag{4.13}$$

が得られる．

もし，$\alpha-1/2=p-m\ (m=0,1,2,\cdots)$ ならば，

$$\mathrm{G.\tilde{F}.}|x|^{-m}H(x) = z^{-m}H(z) = -\frac{1}{j}z^{-m}\,\mathrm{Log}\,(-z)$$

を使えばよい．結果は

$$F_{\pm}(z) = \mp\frac{1}{\pi i}z^{\alpha}\,\mathrm{Log}\,(-z) + iz^{p-1/2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n} \tag{4.14}$$

である．

定理 6 の (4.6), (4.7) に現われる付加項の意味を考えよう．たとえば (4.6) では，任意の p (整数)，b_n (実数) に対して，付加項は $x>0$ に対して虚数，$x<0$ に対して実数となる．したがって，$x>0$ に対して実数部，$x<0$ に対して虚数部を与えただけでは $F_{\pm}(z)$ は確定しないのである．$z\to\infty$ での $F_{\pm}(z)$ のふるまいを指定すると，まず p が決まり，さらに $b_0, b_1, \cdots, b_{p-1}$ が決まる．また，$z=0$ での $F_{\pm}(z)$ の特異性を指定すると，$b_p, b_{p+1}, \cdots$ が決まるのである．(4.7) 式の付加項についても同様である．$z\to\infty$ のとき $z^{-p}F_{\pm}(z)$ が有界である限り

整数 p は任意でよいが，実際上は，p をできるだけ小さく選ぶのが便利である．(p は負の整数であってもよい！)

x 軸上の区間 (a, b) で実(虚)数部，残りの区域で虚(実)数部を与えて $F_\pm(z)$ を決定する問題も上と同様にとり扱うことができる．すなわち，つぎの定理が成り立つ．

[定理 7] $F_\pm(z)$ は $\mathrm{Im}\, z \gtrless 0$ で正則で，$z\to\infty$ のとき，適当な整数 p, q に対して $z^{-(p+q)}F_\pm(z)$ が有界であるような解析関数とする．このとき

$$F_\pm(z) = 2Q(z)\left[\{\mathrm{Im}[F(x)]_\pm H(x;a,b) \pm \mathrm{Re}[F(x)]_\pm \mathrm{sgn}\,(x;a,b)\}\cdot|Q(x)|^{-1} * \delta(z)\right] + iQ(z)\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{a_n}{(z-a)^{n+1}}+\frac{b_n}{(z-b)^{n+1}}\right\} \tag{4.15}$$

$$= -2iQ(z)\left[\{\mathrm{Re}[F(x)]_\pm H(x;a,b) \mp \mathrm{Im}[F(x)]_\pm \mathrm{sgn}\,(x;a,b)\}\cdot|Q(x)|^{-1} * \delta(z)\right] + Q(z)\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{a_n}{(z-a)^{n+1}}+\frac{b_n}{(z-b)^{n+1}}\right\} \tag{4.16}$$

が成り立つ．ただし，$a<b$ とし，

$$Q(z) = (z-a)^{p+1/2}(z-b)^{q+1/2}, \tag{4.17}$$

$$H(x;a,b) = H(x-a)-H(x-b), \tag{4.18}$$

$$\mathrm{sgn}(x;a,b) = H(x-b)-H(a-x) \tag{4.19}$$

とする．また，a_n, b_n は適当な実数定数である．

(証明)
$$G_\pm(z) \equiv [Q(z)]^{-1}F_\pm(z)$$
とおいて，定理 6 の証明と同様にすればよい．詳しくは読者にまかせる．∎

この定理はさらにつぎのように一般化することができる．

[定理 8] n 個の区間 (a_p, b_p) $(p=1, 2, \cdots, n)$ を合併した区域を I とし，実数軸から I を除いた区域を I′ で表わす．(ただし $a_1<b_1<a_2<\cdots<a_n<b_n$.) また，Heaviside 型の関数 $H(x;\mathrm{I})$ を

$$H(x;\mathrm{I}) = 1(x\in\mathrm{I}),\quad 0(x\in\mathrm{I}') \tag{4.20}$$

で定義する．いま，$F_\pm(z)$ は $\mathrm{Im} z \gtrless 0$ で正則で，$\mathrm{Im}\, z\to\pm\infty$ のとき 0 になる解析関数とすれば，

$$F_\pm(z) = 2Q(z)\left[\{\mathrm{Im}[F(x)]_\pm H(x;\mathrm{I}) \pm \mathrm{Re}[F(x)]_\pm H(x;\mathrm{I}')\}\cdot|Q(x)|^{-1} * \delta(z)\right] + iQ(z)\cdot R(z;\mathrm{I}) \tag{4.21}$$

$$= -2iQ(z)[\{\mathrm{Re}[F(x)]_\pm H(x;\mathrm{I}) \mp \mathrm{Im}[F(x)]_\pm H(x;\mathrm{I}')\} \cdot |Q(x)|^{-1} * \delta(z)] + Q(z)\cdot R(z;\mathrm{I}) \tag{4.22}$$

が成り立つ．ただし

$$Q(z) = \left\{\frac{(z-b_1)(z-b_2)\cdots(z-b_n)}{(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_n)}\right\}^{1/2}, \tag{4.23}$$

$$R(z;\mathrm{I}) = \sum_{p=1}^{n}\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\frac{A_{pm}}{(z-a_p)^{m+1}} + \frac{B_{pm}}{(z-b_p)^{m+1}}\right\} \tag{4.24}$$

とし，また A_{pm}, B_{pm} は適当な実数定数とする．

もし，$\mathrm{Im}\, z \to \pm\infty$ のとき $F_\pm(z) \to 0$ という条件が満足されなければ，$Q(z)$ の代りに

$$Q_1(z) \equiv (z-a)^q Q(z)$$

を使えばよい．ただし，$z\to\infty$ のとき $z^{-q}F_\pm(z) \to 0$ となるような最小の整数を q とする．

（証明）　定理 7 の証明と同様に進めばよい．▮

例 2　つぎの条件を満足する解析関数 $F(z)$ を求めよ．

$$F_\pm(z) \to 0, \quad z\to\infty$$
$$\mathrm{Re}[F(x)]_\pm = 0, \quad x<a,\ x>b$$
$$\mathrm{Im}[F(x)]_\pm = 1, \quad a<x<b$$

定理 7 を応用する．$p=q=0$ととることができる．したがって，(4.15) は，付加項を除いて

$$F_\pm(z) = 2Q(z)\{|Q(x)|^{-1}H(x;a,b) * \delta(z)\} \tag{4.25}$$

となる．ところが，(15.6.13) によれば

$$\mathrm{G.\tilde{F}.}\{|Q(x)|^{-1}H(x;a,b)\} = i\{2Q(z)\}^{-1}.$$

したがって，(4.12) を考慮すれば，(4.25) は

$$F_\pm(z) = i + iQ(z)\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{a_n}{(z-a)^{n+1}} + \frac{b_n}{(z-b)^{n+1}}\right\} \tag{4.26}$$

となる．ただし，付加項を書き加えた．

さて，$z\to\infty$ では

$$Q(z) = \{(z-a)(z-b)\}^{1/2} \sim z$$

であるから，(4.26) は

$$F_\pm(z) = i + i(a_0+b_0) + O(z^{-1})$$

となる．したがって，$F_\pm(z) \to 0$ となるためには

$$a_0 + b_0 = -1 \tag{4.27}$$

でなければならない．

さて，$z=a$, $z=b$ での特異性をできるだけ弱くするためには，

$$a_n = b_n = 0 \quad (n=1,2,\cdots) \tag{4.28}$$

とすればよいだろう．このとき，(4.26) は

$$F_\pm(z) = i\left\{1+a_0\left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{1/2}+b_0\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{1/2}\right\} \tag{4.29}$$

となる．(4.27) の条件があるから，$F_\pm(z)$ にはまだ1つ任意定数が残されていることになる．

この問題はつぎのような**流体力学**の問題に相当する．すなわち，$F_\pm(z)$ を**複素速度** $w=u-iv$ (u,v は速度の x,y 成分) と考えると，"線分 (a,b) を占める平板が静止流体中で y 軸の負の方向に単位の速度で動くとき，流れの場はどうなるか" という問題である．このとき解は一義的に決まらない．そこで，ふつうつぎの条件のどれかを追加する．

（i）　平板の端 $z=a$ で速度は有限，

（ii）　平板の端 $z=b$ で速度は有限，

（iii）　平板のまわりの循環は 0.

容易にわかるように，(i) は $a_0=0,\ b_0=-1$, (ii) は $a_0=-1,\ b_0=0$ で満足される．(iii) の条件は

$$\int_C F(z)dz = 0,$$

ただしCは線分 (a,b) を1周する閉曲線，と書き表わされるから，(4.29) を z^{-1} のベキ級数に展開して z^{-1} の係数を0とおけばよい．その結果，$a_0=b_0=-1/2$ が得られるのである．

なお，この問題はつぎのように考えれば計算はずっと簡単になる．すなわち，$F(z)$ の代りに $G(z)\equiv F(z)-i$ を考えると，$G_\pm(z)$ は $z\to\infty$ で有界，$\mathrm{Re}[G(x)]_\pm=0\ (x<a,\ x>b)$, $\mathrm{Im}[G(x)]_\pm=0\ (a<x<b)$ となる．したがって，(4.15) は単に付加項だけとなるからである．

§5.　Riemann-Hilbert の問題

上半平面 $\mathrm{Im}\,z>0$ で正則な解析関数 $F(z)$ を，x 軸上の一部で実数部，残りの部分で虚数部を与えて決定することは定理8によって可能になった．これを一般化したつぎの問題を考えてみよう．$a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ は与えられた実数値関数とし，x 軸上で

$$a(x)\mathrm{Re}[F(x)]_+ + b(x)\,\mathrm{Im}[F(x)]_+ = c(x) \tag{5.1}$$

を満たすような $F(z)$ を求めようというのである．この問題は Riemann によってはじめて考えられ，Hilbert によってすこし変った形で議論されたので，**Riemann–Hilbert の問題**とよばれている．$a(x)=H(x;\mathrm{I})$, $b(x)=-H(x;\mathrm{I}')$ という特別なばあいが定理8の (4.22) に相当することは明らかであろう．

さて，(5.1) の左辺は

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}[\{a(x)-ib(x)\}\{\mathrm{Re}[F(x)]_+ + i\,\mathrm{Im}[F(x)]_+\}]\\&\quad=\mathrm{Re}\{(a-ib)[F(x)]_+\}\end{aligned}$$

と書けるから，もしも

$$\frac{[\varphi(x)]_+}{|[\varphi(x)]_+|}=\frac{a(x)-ib(x)}{\sqrt{\{a(x)\}^2+\{b(x)\}^2}} \tag{5.2}$$

を満足するような $\mathrm{Im}\,z>0$ で正則な解析関数 $\varphi(z)$ が存在するならば，(5.1) は

$$\mathrm{Re}\{[\varphi(x)]_+\cdot[F(x)]_+\}=\frac{c(x)|[\varphi(x)]_+|}{\sqrt{\{a(x)\}^2+\{b(x)\}^2}} \tag{5.3}$$

のように表わされる．上超関数の積として $[\varphi(x)]_+\cdot[F(x)]_+=[\varphi(x)F(x)]_+$ であるから，定理 2 の (2.13) により

$$\varphi(z)F(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c(x)|[\varphi(x)]_+|}{\sqrt{\{a(x)\}^2+\{b(x)\}^2}}\frac{dx}{x-z}+iB \tag{5.4}$$

である．ただし，定数 B は $\mathrm{Im}\,z\to+\infty$ のとき $\mathrm{Im}\{\varphi(z)F(z)\}\to B$ という条件で決定される．

さて

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}[\log\varphi(x)]_+&=\mathrm{Im}\{\log[\varphi(x)]_+\}=\tan^{-1}\frac{\mathrm{Im}[\varphi(x)]_+}{\mathrm{Re}[\varphi(x)]_+}\\&=-\tan^{-1}\frac{b(x)}{a(x)}\qquad\because\ (5.2)\end{aligned}$$

である．したがって，定理 2 の (2.14) により

$$\log\varphi(z)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tan^{-1}\{b(x)/a(x)\}}{x-z}dx. \tag{5.5}$$

ただし，(2.14) の実数の定数 a_+ を省略した．((5.2) を満足する $\varphi(z)$ が 1 つでも求まればよいからである．) (5.5) の $\varphi(z)$ を (5.4) に代入すれば，けっきょく，求める解析関数 $F(z)$ が得られるのである．

注意 以上の計算について，すこし注意しておく必要がある．$a(x)$, $b(x)$ が任意に与えられたとき，(5.5) によって $\varphi(z)$ は確かに計算される．しかし，(5.4) については問題がある．いま，(5.3) の右辺を $g(x)$ とおくと，(5.3) は

$$\mathrm{Re}[\varphi(x)F(x)]_+=g(x) \tag{5.6}$$

と書ける．$x\to\pm\infty$ のとき，もしも $g(x)$ が適当に小さくなければ，(5.4) の積分は収束しないのである．このようなばあいには，(5.6) を x について微分して得られる

$$\mathrm{Re}\left[\frac{d^n}{dx^n}\{\varphi(x)F(x)\}\right]_+=g^{(n)}(x) \tag{5.7}$$

を考える．$x\to\pm\infty$ に対して $g^{(n)}(x)$ が適当に小さければ，(5.4) と同様に計算して $d^n/dz^n\{\varphi(z)F(z)\}$ が得られ，これを n 回積分することによって $\varphi(z)F(z)$ が見出される

のである.

(5.6) の左辺は上超関数の実数部として超関数である．したがって右辺も超関数であるべきである．つまり，本来は $\mathcal{P}_{-\infty}^{\infty}g(x)$ とすべきものである．(§4. の注意を見よ.) ところが，$a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ の与え方によっては $\varphi(z)$ は x 軸上に特異点をもつ可能性があり，それにひきずられて $F(z)$ もそこで特異性をもつことも予想されるので，(5.6) は正しくは

$$\mathrm{Re}\,[\varphi(x)F(x)]_+ = \mathcal{P}_{-\infty}^{\infty}g(x) + \sum_{p=1}^{N}\delta_\infty(x-a_p)$$

とするべきであろう．ここで $x=a_p\ (p=1,2,\cdots,N)$ は予想される特異点，$\delta_\infty(x-a_p)$ はその点での一般 δ 関数である．その結果，(5.4) の右辺には $A_{pm}(z-a_p)^{-m}\ (m=1,2,\cdots)$ の形の付加項が現われることになる．実数定数 A_{pm} は，B と同様，$F(z)$ に関する付加的な条件から決定されるべきものである.

例 3　(5.1) の条件で $a(x)=x^{-p}H(x)$, $b(x)=x^{-p}H(-x)$ として，定理 6 の (4.6) を導け.

§6.　Hilbert 変換に関連する積分方程式

いま，つぎのような積分方程式を考えよう.

$$\int_a^b \frac{f(t)}{t-x}dt = g(x), \qquad a<x<b. \tag{6.1}$$

$f(x)$ がふつうの関数のばあいには，左辺の積分に意味をもたせるために，**Cauchy の主値**をとることにする．つまり，積分は $\mathrm{P}\int_a^b$ である．$f(x)$ を超関数とみなすと，記号 P をつけるまでもなく，超関数の積分として左辺は明確な意味をもつ．いずれにしても，右辺の $g(x)$ はふつうの関数である．要するに，(6.1) は "ふつうの関数 $g(x)$ が与えられたとき超関数 $f(x)$ を求めよ" という積分方程式である．これを解いて O.F. $f(x)$ を考えれば，それはもちろん，ふつうの関数としての積分方程式の解を与えるのである.

それでは，$g(x)$ が超関数のばあいはどうか？　このばあい，左辺を超関数に見直すためには，

$$f(x)=0, \qquad x<a,\ x>b \tag{6.2}$$

として $f(x)$ の定義域を (a,b) から $(-\infty,\infty)$ にひろげ，つまり $\mathcal{P}_a^b f(x) \equiv f(x)H(x;a,b)$ を改めて $f(x)$ と考え，

$$-f(x)*\frac{1}{x} = g(x), \qquad a<x<b$$

をとればよい．Hilbert 変換の定義 15.1 により，これはまた

$$\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{\pi}g(x), \qquad a<x<b \tag{6.3}$$

のように表わされる．けっきょく，(6.1) の積分方程式は，超関数の範囲では (6.3) のように表現される．(6.3) の両辺の O.F. をとれば (6.1) が得られることはいうまでもなかろう．

さて，(6.3) は一見容易に解けそうに見える．すなわち，$\mathcal{H}\mathcal{H}=-1$ の関係を使って

$$f(x) = -\frac{1}{\pi}\mathcal{H}g(x) \tag{6.4}$$

とすればよさそうである．しかし，これはいけない！ まず第一に，右辺の $g(x)$ は区間 $a<x<b$ でしか与えられていないから，$x<a$, $x>b$ での値は未知である．(6.2) につられて，$f(x)$ と同様 $g(x)$ も $x<a$, $x>b$ で 0 になると早合点してはいけない．(実は，(6.2), (6.3) によって $f(x)$ がきまり，その $f(x)$ を使って $\mathcal{H}f(x)$ を計算すれば，$a<x<b$ では確かに $g(x)/\pi$ に一致するが，$x<a$, $x>b$ では必ずしも 0 になるとは限らないのである．) 第二に，定理 15.4 を思い出せばわかるように，$\mathcal{H}\mathcal{H}=-1$ の関係は無条件には成立しないのである．

以上の点を心に留めておいて，(6.3) のとり扱いを簡単なばあいからはじめよう．

§7. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)(t-x)^{-1}dt = g(x)$

まず，$a=-\infty$, $b=\infty$ のばあいを考えよう．(6.3) により

$$\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{\pi}g(x) \tag{7.1}$$

である．このばあい，定理 15.5 がそのまま適用される．すなわち，もし G.F. $g(\pm i\infty)=0$ ならば

$$f(x) = -\frac{1}{\pi}\mathcal{H}g(x)+c \tag{7.2}$$

が (7.1) の解である．ここで c は任意定数である．

G.F. $g(\pm i\infty)=0$ の条件が満たされていないばあいには，(7.1) を x について微分する：

$$\mathcal{H}f'(x) = \frac{1}{\pi}g'(x). \tag{7.3}$$

ここで，もし G.F. $g'(\pm i\infty)=0$ の条件が満たされれば，(7.2) と同様にして $f'(x)$ が求められるから，これを積分して $f(x)$ が得られるのである．

例 4 積分方程式：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-x}dt = H(x;a,b) \tag{7.4}$$

を解け．

このばあい，$g(x)=H(x;a,b)$ であるから，(7.2) により

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{\pi}\mathcal{H}H(x;a,b)+c \\ &= \frac{1}{\pi^2}\log\left|\frac{x-a}{x-b}\right|+c. \end{aligned} \tag{7.5}$$

ただし，(15.6.10) の公式を使う．

例 5 積分方程式：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-x}dt = |x|^{\alpha}\operatorname{sgn} x \quad (\alpha=\text{非整数}) \tag{7.6}$$

を解け．

$g(x)=|x|^{\alpha}\operatorname{sgn} x$ であるから，

$$G(z) = \text{G.F.}\, g(x) = \frac{i}{\pi\sin\pi\alpha}\{(-z)^{\alpha}-z^{\alpha}\}$$

である．$\mathrm{Re}\,\alpha<0$ ならば，$\mathrm{Im}\, z\to\pm\infty$ に対して $G(z)\to 0$ であるから，$G(z)$ は標準母関数となり，(7.2) が適用される．すなわち

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{\pi}\mathcal{H}|x|^{\alpha}\operatorname{sgn} x+c \\ &= \frac{1}{\pi}\cot\frac{\pi}{2}\alpha|x|^{\alpha}+c. \quad \because\ \text{例 15.2} \end{aligned} \tag{7.7}$$

つぎに，$\mathrm{Re}\,\alpha<0$ の条件を緩和することを考える．それには (7.3) を利用する．$g'(x)=\alpha|x|^{\alpha-1}$ であるから，$\mathrm{Re}\,\alpha<1$ に対して G.F. $g'(x)$ が存在し，G.F. $g'(\pm i\infty)=0$ である．したがって

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{\alpha}{\pi}\mathcal{H}|x|^{\alpha-1}+c \\ &= \frac{\alpha}{\pi}\cot\frac{\pi}{2}\alpha|x|^{\alpha-1}\operatorname{sgn} x+c. \quad \because\ \text{例 15.2} \end{aligned}$$

これを x について積分すれば

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\cot\frac{\pi}{2}\alpha|x|^{\alpha}+cx+c' \tag{7.8}$$

が得られる．ただし c' は積分定数である．さて，(7.8) がもとの積分方程式を満足することを確かめなければならない．$\mathcal{H}|x|^{\alpha}$ は，例 15.2 により，$\mathrm{Re}\,\alpha<1$ に対して確かに存在する．$\mathcal{H}x$ は存在しないから，$c=0$ でなければならない．けっきょく，(7.8) は (7.7) に帰着し，これが $\mathrm{Re}\,\alpha<1$ に対して解を表わすことがわかった．

例 6

$$\mathcal{H}f(x) = 1 \tag{7.9}$$

を満足する $f(x)$ は存在しないことを示せ．

もし存在するとすれば，(7.9) の両辺を x について微分することにより

$$\frac{d}{dx}\mathcal{H}f(x) = \mathcal{H}f'(x) = 0$$

が得られるはずである．したがって，定理 15.3 により

$$f'(x) = c.$$

$$\therefore\ f(x) = cx+c'.$$

ところが $\mathcal{H}x$ は存在しないから，$c=0$ でなければならない．そのばあい，$\mathcal{H}f(x)=\mathcal{H}c'=0$ であるから，(7.9) は成り立たないのである．

§8.　$\int_0^\infty f(t)(t-x)^{-1}dt=g(x),\quad x>0$

つぎに，(6.1) で $a=0$, $b=\infty$ のばあい，すなわち

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t-x}dt = g(x), \qquad x>0 \tag{8.1}$$

を考えよう．いま $f_0(x)=\mathcal{P}_0^\infty f(x)\equiv f(x)H(x)$ と書くことにすれば，(8.1) は

$$\mathcal{H}f_0(x) = \pi^{-1}g(x), \qquad x>0 \tag{8.2}$$

となり，$f_0(x)$ は右超関数である．(8.2) が解をもつとすれば，$\mathcal{H}f_0(x)$ が存在し，したがって G.$\tilde{\text{F}}$.$f_0(x)$ が存在する．これを $F(z)$ と表わすことにしよう．さらに

$$G(z) = (-z)^{-1/2}F(z) \tag{8.3}$$

とおいて

$$g_0(x) = \text{H.F. } G(z) \tag{8.4}$$

を考える．$F(z)$, $(-z)^{-1/2}$ はともに x 軸の正の部分を除いて正則，したがって $G(z)$ も同じ領域で正則である．そこで，$G(z)$ も標準母関数であると仮定しよう．(もしも標準母関数 $F(z)$ が $\text{Im}\, z\to\pm\infty$ のとき $F(z)\to c_\pm$ であるならば，$G(z)\to 0$ となり，定理 10.3 により，$G(z)$ は確かに標準母関数である！）

(7.2.13) により

$$[(-x)^{-1/2}]_\pm = \pm i|x|^{-1/2}H(x)+|x|^{-1/2}H(-x) \tag{8.5}$$

であるから，(8.3) から

$$\begin{aligned}[G(x)]_\pm &= [(-x)^{-1/2}]_\pm\cdot[F(x)]_\pm \\ &= \pm i|x|^{-1/2}[F(x)]_\pm H(x)+|x|^{-1/2}[F(x)]_\pm H(-x)\end{aligned}$$

が得られる．これから，定理 15.16 を利用して，

$$\begin{aligned}g_0(x) &= [G(x)]_+ - [G(x)]_- \\ &= i|x|^{-1/2}\{[F(x)]_+ + [F(x)]_-\}H(x) \\ &\quad + |x|^{-1/2}\{[F(x)]_+ - [F(x)]_-\}H(-x) \\ &= \{|x|^{-1/2}\mathcal{H}f_0(x)\}H(x)+|x|^{-1/2}f_0(x)H(-x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}g_0(x) &= i\{[G(x)]_+ + [G(x)]_-\}\\ &= -|x|^{-1/2}\{[F(x)]_+ - [F(x)]_-\}H(x)\\ &\quad + i|x|^{-1/2}\{[F(x)]_+ + [F(x)]_-\}H(-x)\\ &= -|x|^{-1/2}f_0(x)H(x) + \{|x|^{-1/2}\mathcal{H}f_0(x)\}H(-x)\end{aligned}$$

が得られる．$f_0(x)=0$ $(x<0)$ を考慮すれば，けっきょく

$$g_0(x) = \{|x|^{-1/2}\mathcal{H}f_0(x)\}H(x), \tag{8.6}$$

$$\mathcal{H}g_0(x) = -|x|^{-1/2}f_0(x) + \{|x|^{-1/2}\mathcal{H}f_0(x)\}H(-x) \tag{8.7}$$

である．したがって

$$\mathcal{H}f_0(x) = x^{1/2}g_0(x), \qquad x>0 \tag{8.8}$$

$$f_0(x) = -x^{1/2}\mathcal{H}g_0(x), \qquad x>0 \tag{8.9}$$

の関係がある．

(8.2) と (8.8) とを比較すれば，

$$x^{1/2}g_0(x) = \pi^{-1}g(x), \qquad x>0 \tag{8.10}$$

を満足する $g_0(x)$ を (8.9) に代入することによって解が得られることがわかる．$g_0(x)$ は $x<0$ に対して 0 であるから，(8.10) を満足する $g_0(x)$ は一般に

$$g_0(x) = \frac{1}{\pi}\frac{g(x)}{x^{1/2}}H(x) + \delta_\infty(x) \tag{8.11}$$

で与えられる．$\delta_\infty(x)$ はもちろん一般 δ 関数である．また，右辺の第 1 項は $\pi^{-1}\mathcal{P}_0^\infty\{x^{-1/2}g(x)\}$ の意味である．さて，

$$\mathcal{H}\delta^{(m)}(x) = \frac{d^m}{dx^m}\mathcal{H}\delta(x) = -\frac{1}{\pi}\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{m!}{\pi(-x)^{m+1}}$$

であるから

$$\mathcal{H}\delta_\infty(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{c_n}{x^{n+1}}. \tag{8.12}$$

ただし，c_n は任意定数である．(8.9), (8.11), (8.12) により，けっきょく

$$\begin{aligned}f_0(x) &= -\frac{1}{\pi}x^{1/2}\mathcal{H}\left\{\frac{g(x)}{x^{1/2}}H(x)\right\} + \sum_{n=0}^\infty \frac{c_n}{x^{n+1/2}}\\ &= -\frac{1}{\pi^2}x^{1/2}\int_0^\infty \frac{g(t)}{t^{1/2}}\frac{dt}{t-x} + \sum_{n=0}^\infty \frac{c_n}{x^{n+1/2}}\end{aligned} \tag{8.13}$$

が得られる．c_n は (8.12) の c_n とは異なるが，任意定数である．以上を定理としてまとめておこう．

[定理 9] 積分方程式：

$$\int_0^\infty f(t)(t-x)^{-1}dt = g(x), \qquad x>0,$$

の解は，もし存在すれば，

$$f(x)=-\frac{1}{\pi}x^{1/2}\cdot\mathcal{H}\{x^{-1/2}g(x)H(x)\}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{x^{n+1/2}},\quad x>0 \tag{8.14}$$

である．

例 7 積分方程式：

$$\int_0^\infty\frac{f(t)}{t-x}dt=x^\alpha,\qquad x>0 \tag{8.15}$$

の解は $\mathrm{Re}\,\alpha<0$，$\alpha\neq-m\ (m=1,2,\cdots)$ のときのみ存在し，特解は

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{\pi}\tan\pi\alpha\, x^\alpha, & \alpha\neq\dfrac{1}{2}-m\\[2mm] \dfrac{1}{\pi^2}x^\alpha\log x, & \alpha=\dfrac{1}{2}-m\end{cases}$$

である．一般解はこれに $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^{-(n+1/2)}$ を付け加えて得られる．

ヒント 定理 9 と例 15.2 の公式を使う．

注意 この例で $\alpha=-m$ のばあいには解は存在しない．しかし，$\int_0^\infty$ の積分の意味を $\int_{-0}^\infty$ のように解釈すれば，(8.9) の右辺に $\delta_\infty(x)$ を付け加えることができ，したがって解が存在することになる．実際，(8.12) の関係を使えば，定数 c_n を適当に選ぶことによって解が得られるのである．

§9. $\int_a^b f(t)(t-x)^{-1}dt=g(x),\quad a<x<b$

積分方程式：

$$\int_a^b\frac{f(t)}{t-x}dt=g(x),\qquad a<x<b \tag{9.1}$$

も上と同様にとり扱うことができる．まず，$f_0(x)=\mathcal{P}_a^bf(x)\equiv f(x)H(x;a,b)$ は中央超関数であるから，標準母関数 $F(z)=\mathbf{G}.\widetilde{\mathbf{F}}.f_0(x)$ は必ず存在する．つぎに

$$Q(z)=\{(z-a)(z-b)\}^{1/2} \tag{9.2}$$

を導入して，

$$G(z)=\frac{F(z)}{Q(z)} \tag{9.3}$$

を考える．定理 10.1 により

$$F(z)=\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\cdots,\qquad z\to\infty$$

のように展開される．したがって

$$G(z)=\frac{c_1}{z^2}+\left\{c_2+\frac{1}{2}(a+b)c_1\right\}\frac{1}{z^3}+\cdots,\qquad z\to\infty$$

である．そこで，定理 10.3 により，$G(z)$ も標準母関数になり得る．$g_0(x)=$ H.F. $G(z)$ としよう．(15.6.22) により

$$[\{Q(x)\}^{-1}]_\pm=|Q(x)|^{-1}\,\mathrm{sgn}\,(x;a,b)\mp i|Q(x)|^{-1}H(x;a,b) \quad (9.4)$$

であるから，(9.3) から，$x\neq 0$ に対して

$$\begin{aligned}[G(x)]_\pm &= [\{Q(x)\}^{-1}]_\pm\cdot[F(x)]_\pm\\ &=|Q(x)|^{-1}\{[F(x)]_\pm\,\mathrm{sgn}\,(x;a,b)\mp i[F(x)]_\pm H(x;a,b)\}\end{aligned} \quad (9.5)$$

が得られる．これから，定理 15.16 を利用して

$$\begin{aligned}g_0(x) &= [G(x)]_+-[G(x)]_-\\ &=-|Q(x)|^{-1}\{\mathcal{H}f_0(x)\}H(x;a,b),\end{aligned} \quad (9.6)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}g_0(x) &= i\{[G(x)]_+ + [G(x)]_-\}\\ &=|Q(x)|^{-1}[\{\mathcal{H}f_0(x)\}\mathrm{sgn}(x;a,b)+f_0(x)]\end{aligned} \quad (9.7)$$

が得られる．したがって

$$\mathcal{H}f_0(x)=-|Q(x)|g_0(x),\qquad a<x<b \quad (9.8)$$

$$f_0(x)=|Q(x)|\mathcal{H}g_0(x),\qquad a<x<b \quad (9.9)$$

の関係がある．(9.1) は

$$\mathcal{H}f_0(x)=\pi^{-1}g(x),\qquad a<x<b \quad (9.10)$$

と表わされるから，これと (9.8) とを見比べて

$$g_0(x)=-\pi^{-1}|Q(x)|^{-1}g(x)H(x;a,b)+\delta_\infty(x-a)+\delta_\infty(x-b) \quad (9.11)$$

とおけばよいことがわかる．これを (9.9) に代入すれば

$$\begin{aligned}f_0(x)=&-\frac{|Q(x)|}{\pi}\mathcal{H}\left\{\frac{g(x)}{|Q(x)|}H(x;a,b)\right.\\ &\left.+|Q(x)|\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{c_n}{(x-a)^{n+1}}+\frac{c_n'}{(x-b)^{n+1}}\right\}\right.\end{aligned} \quad (9.12)$$

が得られる．ただし，c_n, c_n' は任意定数である．……

こうしたいところであるが，実は c_0, c_0' にはある条件がつくのである．すなわち，$z\to\infty$ のとき $G(z)=O(z^{-2})$ であるから，$g_0(x)=$H.F. $G(z)$ は

$$\int_{-\infty}^{\infty}g_0(x)dx=-\int_C G(z)=0 \quad (9.13)$$

を満たさなければならないのである．

$$\delta_\infty(x-a)=A\,\delta(x-a)+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\delta^{(n)}(x-a),$$

$$\delta_\infty(x-b)=B\,\delta(x-b)+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\delta^{(n)}(x-b)$$

とすると，(9.11) を (9.13) に代入することによって

$$A+B=\frac{1}{\pi}\int_a^b\frac{g(x)}{|Q(x)|}dx$$

が得られる．したがって，(9.11) の一般 δ 関数の第1項は，(9.9) により，$f_0(x)$ に対して

$$-\frac{|Q(x)|}{\pi}\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}\right)=\frac{(A+B)x-(bA+aB)}{\pi|Q(x)|}$$

だけ寄与する．ここで $A+B$ は指定された値をもち，$bA+aB$ は任意である．一般 δ 関数の第2項以下はまったく任意である．それゆえ，(9.12) はけっきょく

$$f_0(x)=-\frac{|Q(x)|}{\pi}\mathscr{H}\left\{\frac{g(x)}{|Q(x)|}H(x;a,b)\right\}+\frac{Cx}{|Q(x)|}$$
$$+\frac{1}{|Q(x)|}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{c_n}{(x-a)^n}+\frac{c_n'}{(x-b)^n}\right\}, \tag{9.14}$$

$$C=\frac{1}{\pi^2}\int_a^b\frac{g(x)}{|Q(x)|}dx \tag{9.15}$$

の形に表わされる．ただし，c_n, c_n' は任意である．つまり (9.14) は (9.11) の**一般解**であって，Σ の項は同次方程式 $\int_a^b f(t)(t-x)^{-1}dt=0$ の一般解，これを除いたものが**特解**である．ところが，この特解はまた

$$f_0(x)=-\frac{1}{\pi|Q(x)|}\mathscr{H}\{|Q(x)|g(x)H(x;a,b)\}+\frac{C_0}{|Q(x)|}, \tag{9.16}$$

$$C_0=\frac{1}{\pi^2}\int_a^b\frac{g(x)}{|Q(x)|}dx-(a+b)C$$

のように書きかえることができる．(下の例8を見よ．) $C_0|Q(x)|^{-1}$ は同次方程式の1つの解であるから，もとの方程式の特解としてはこの項を省略してもよい．以上をまとめると，けっきょく，つぎの定理が得られる．

[定理 10] 積分方程式：

$$\int_a^b f(t)(t-x)^{-1}dt=g(x), \qquad a<x<b,$$

の解はつねに存在し，

$$f(x)=-\frac{|Q(x)|}{\pi}\mathscr{H}\left\{\frac{g(x)}{|Q(x)|}H(x;a,b)\right\}+\frac{Cx}{|Q(x)|}$$
$$+\frac{1}{|Q(x)|}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{c_n}{(x-a)^n}+\frac{c_n'}{(x-b)^n}\right\} \tag{9.17}$$

$$=-\frac{1}{\pi|Q(x)|}\mathcal{H}\{|Q(x)|g(x)H(x;a,b)\}$$
$$+\frac{1}{|Q(x)|}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{c_n}{(x-a)^n}+\frac{c_n'}{(x-b)^n}\right\} \tag{9.18}$$

で与えられる．ただし

$$C=\frac{1}{\pi^2}\int_a^b\frac{g(x)}{|Q(x)|}dx, \tag{9.19}$$

c_n, c_n' は任意定数である．

この定理からただちにつぎの定理が得られる．

[定理 11] 任意の超関数 $f(x)$, $a<x<b$, に対してつぎの関係が成り立つ．

$$f(x)=-\mathcal{H}\mathcal{P}_a^b[|Q(x)|^{-1}\mathcal{H}\mathcal{P}_a^b\{|Q(x)|f(x)\}]$$
$$=-\mathcal{H}\mathcal{P}_a^b[|Q(x)|\mathcal{H}\mathcal{P}_a^b\{|Q(x)|^{-1}f(x)\}]$$
$$+\pi^{-1}\int_a^b|Q(x)|^{-1}f(x)dx. \tag{9.20}$$

(証明) $\mathcal{H}f(x)=\pi^{-1}g(x)$, $a<x<b$, の解が定理 10 で与えられることから，(9.17), (9.18) の両辺に $\mathcal{H}$ を作用させ，$\pi^{-1}g(x)$ を改めて $f(x)$ と書けばよい．∎

例 8 $f_0(x)=\mathcal{P}_a^bf(x)\equiv f(x)H(x;a,b)$ とすれば，$a<x<b$ に対してつぎの関係が成り立つ．

$$|Q|\mathcal{H}\left(\frac{f_0}{|Q|}\right)=\frac{1}{|Q|}\mathcal{H}(|Q|f_0)+\frac{1}{|Q|}[c_1x+\{c_2-(a+b)c_1\}], \tag{9.21}$$

$$c_1=\frac{1}{\pi}\int_a^b\frac{f_0(x)}{|Q(x)|}dx,\quad c_2=\frac{1}{\pi}\int_a^b\frac{f_0(x)x}{|Q(x)|}dx, \tag{9.22}$$

$$\frac{d}{dx}\left\{|Q|\mathcal{H}\left(\frac{f_0}{|Q|}\right)\right\}=\frac{1}{|Q|}\mathcal{H}\{|Q|f_0'(x)\}. \tag{9.23}$$

ヒント $\{Q(x)\}^2=(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab$ に注意し，定理 15.14 を適用すれば，一般に

$$\mathcal{H}(Q^2f)=Q^2\mathcal{H}f-c_1x-\{c_2-(a+b)c_1\}, \tag{9.24}$$

$$c_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx,\quad c_2=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)xdx \tag{9.25}$$

という関係式が得られる．ここで $f(x)\to f_0(x)|Q(x)|^{-1}$ とおきかえれば (9.21), (9.22) が得られる．

つぎに，$QQ'=x-(a+b)/2$ に注意すれば，定理 15.14 により

$$Q^2\frac{d}{dx}(\mathcal{H}f)+QQ'\mathcal{H}f=\mathcal{H}(Q^2f'+QQ'f) \tag{9.26}$$

の関係式が得られる．ここで $f(x)\to f_0(x)|Q(x)|^{-1}$ とおきかえれば (9.23) が得られる．

注意 (9.8) の代りに (9.9) を (9.10) に対応づけると (f_0 と g_0 の文字を交換して), (9.12) に相当して (9.18) の形の解がただちに得られる. ただし, $\sum$ の $n=0$ に相当する項が欠けている. それはなぜか? 実は, (9.9) の $g_0(x)$ は H.F. $G(z)$ として定義され, $z\to\infty$ のとき $G(z)=O(z^{-2})$ という条件がつけられているので, $|Q(x)|^{-1}$ のような解を含み得ないのである. この点に注意すれば, 定理 10 の (9.18) の解は, (9.17) を経ないで直接に求めることができるのである.

例 9 積分方程式:

$$\int_a^b \frac{f(t)}{t-x}dt = 1, \quad a<x<b \tag{9.27}$$

の解は

$$f(x) = \frac{x}{\pi\sqrt{(x-a)(b-x)}} + \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{c_n}{(x-a)^n} + \frac{c_n'}{(x-b)^n}\right\}$$

である. ただし, c_n, c_n' は任意定数.

ヒント 定理 10 と公式 (15.6.14) または (15.6.15) を使えばよい. なお, 例 4 と比較せよ.

§ 10. $\mathscr{H}f(x)=\alpha(x)f(x)+\beta(x)$

Hilbert 変換に関連する積分方程式として

$$\mathscr{H}f(x) = \alpha(x)f(x)+\beta(x) \tag{10.1}$$

を考えよう. ここで $\alpha(x)$, $\beta(x)$ は与えられた関数あるいは超関数とする. 問題は, (10.1) を満足する超関数 $f(x)$ を求めることである.

さて, (10.1) が意味をもつためには, 積 $\alpha(x)f(x)$ が超関数として意味をもたなければならない. (実は, そのような解 $f(x)$ を求めようとするのである.) また, $\mathscr{H}f(x)$ が存在するためには, $f(x)$ は標準母関数 $F(z)$ をもたなければならない. したがって, 定理 15.4 により

$$f(x) = [F(x)]_+ - [F(x)]_-, \tag{10.2}$$

$$\mathscr{H}f(x) = i\{[F(x)]_+ + [F(x)]_-\} \tag{10.3}$$

が成り立つ. これらを (10.1) に代入して整理すれば

$$[F(x)]_+ = A(x)[F(x)]_- + B(x) \tag{10.4}$$

の形になる. ただし

$$A(x) = \frac{\alpha(x)+i}{\alpha(x)-i}, \quad B(x) = -\frac{\beta(x)}{\alpha(x)-i} \tag{10.5}$$

とおいてある.

すなわち, 積分方程式 (10.1) は, 標準母関数 $F(z)$ を (10.4) の条件のもと

に決定するという問題に帰着するのである．この問題は**Riemann–Hilbert の問題**として知られている．実際，下に見られるように，これは前に §5 でとり扱った問題のひとつの表現にほかならないのである．

さて，(10.4) を解くために，まず，$B(x)=0$ という特別なばあい，つまり**同次方程式**の解を求めよう．その解が求まったとして，それを $\varphi(z)$ とおけば

$$[\varphi(x)]_+ = A(x)[\varphi(x)]_- \qquad (10.6)$$

である．$\varphi(z)$ は標準母関数であるから，$\mathrm{Im}\, z>0$ および $\mathrm{Im}\, z<0$ で正則である．さて，もし $\varphi(z)$ が $\mathrm{Im}\, z\gtrless 0$ で零点をもたないとすれば，$\log\varphi(z)$ は $\mathrm{Im}\, z\gtrless 0$ で正則である．したがって，$\log\varphi(z)$ は標準型母関数であって，上(下)超関数 $[\log\varphi(x)]_\pm=\log[\varphi(x)]_\pm$ を考えることができる．そして，(10.6) により

$$[\log\varphi(x)]_+ - [\log\varphi(x)]_- = \log A(x) \qquad (10.7)$$

の関係が成り立つ．これを (15.7.1) と比較すれば

$$\log\varphi(z) = \mathrm{G.\hat{F}.}\log A(x) \qquad (10.8)$$

であることがわかる．したがって

$$\varphi(z) = \exp\{\mathrm{G.\hat{F}.}\log A(x)\}. \qquad (10.9)$$

これで，与えられた $A(x)$ に対する (10.6) の解が具体的に求められた．そして $\varphi(z)$ が零点をもたないことが，(10.9) によって結果的に確かめられたわけである．標準型母関数には整関数 $\Phi(z)$ だけの不定性があるから，$\varphi(z)$ には $\exp\Phi(z)$ の因数だけの任意性がある．

つぎに，**非同次方程式**，すなわち $B(x)\neq 0$ のばあいを考えよう．線形微分方程式のとり扱いにならって

$$F(z) = \varphi(z)G(z) \qquad (10.10)$$

とおき，(10.4) を未知関数 $G(z)$ について書き表わす：

$$[\varphi(x)G(x)]_+ = A(x)[\varphi(x)G(x)]_- + B(x).$$

$$\therefore\quad [\varphi(x)]_+[G(x)]_+ = A(x)[\varphi(x)]_-[G(x)]_- + B(x).$$

$$\therefore\quad [G(x)]_+ - [G(x)]_- = \frac{B(x)}{[\varphi(x)]_+}. \qquad (10.11)$$

ただし (10.6) を使った．

(10.11) は (10.7) と同じ形の方程式であるから，ただちに

$$G(z) = \mathrm{G.\hat{F}.}\left\{\frac{B(x)}{[\varphi(x)]_+}\right\} \qquad (10.12)$$

が得られる．$\varphi(z)$ の $\exp\Phi(z)$ だけの任意性を利用すれば，$B(x)/[\varphi(x)]_+$ が

標準母関数をもつようにすることもできる．そのばあい

$$G(z) = \mathrm{G.\tilde{F}.}\left\{B(x)/[\varphi(x)]_{+}\right\} + c$$

$$= \frac{B(x)}{[\varphi(x)]_{+}} * \delta(z) + c. \tag{10.13}$$

ただし，c は任意定数である．(10.12), (10.13) を (10.10) に代入すれば，けっきょく

$$F(z) = \varphi(z)\,\mathrm{G.\hat{F}.}\left\{\frac{B(x)}{[\varphi(x)]_{+}}\right\} \tag{10.14}$$

$$= \varphi(z)\left\{\frac{B(x)}{[\varphi(x)]_{+}} * \delta(z) + c\right\} \tag{10.15}$$

として，Riemann–Hilbert の問題 (10.4) の**一般解**が得られるのである．ここで，$c\varphi(z)$ が同次方程式の一般解であることに注意してほしい．

さて，はじめの問題 (10.1) の解を求めるには，(10.14) を (10.2) に代入すればよい．まず

$$[F(x)]_{\pm} = [\varphi(x)]_{\pm}\cdot\left[\mathrm{G.\hat{F}.}\left\{\frac{B(x)}{[\varphi(x)]_{+}}\right\}\right]_{\pm} \tag{10.16}$$

である．(15.8.5) により，標準型母関数 $\hat{F}(z) = \mathrm{G.\hat{F}.}f(x)$ に対して

$$[\mathrm{G.\hat{F}.}f(x)]_{\pm} = \frac{1}{2}(\pm 1 - i\hat{\mathscr{H}})f(x) \tag{10.17}$$

の関係が成り立つ．これを (10.9) に適用すると

$$[\varphi(x)]_{\pm} = \exp\left\{\pm\frac{1}{2}\log A(x) - \frac{i}{2}\hat{\mathscr{H}}\log A(x)\right\}$$

$$= \{A(x)\}^{\pm 1/2}\exp\left\{-\frac{i}{2}\hat{\mathscr{H}}\log A(x)\right\}. \tag{10.18}$$

したがって

$$\frac{B(x)}{[\varphi(x)]_{+}} = \frac{B(x)}{\{A(x)\}^{1/2}}\exp\left\{\frac{i}{2}\hat{\mathscr{H}}\log A(x)\right\}. \tag{10.19}$$

(10.5) によって $A(x)$, $B(x)$ を $\alpha(x)$, $\beta(x)$ で表わし，(10.19) を (10.16) に代入し，さらに (10.17) の関係を利用すると

$$f(x) = [F(x)]_{+} - [F(x)]_{-}$$

$$= -\frac{\alpha\beta}{\alpha^2+1} - \frac{1}{\gamma(\alpha^2+1)^{1/2}}\hat{\mathscr{H}}\left\{\frac{\beta\gamma}{(\alpha^2+1)^{1/2}}\right\} \tag{10.20}$$

が得られる．ただし，

$$\gamma(x) = \exp\left\{\frac{i}{2}\hat{\mathscr{H}}\log\frac{\alpha(x)+i}{\alpha(x)-i}\right\} \tag{10.21}$$

とおいてある．

Hilbert 型変換 $\hat{\mathscr{H}}$ に伴なう任意性について一言注意しておこう．$\gamma(x)$ についての任意性は，定理 15.23 により，(10.20) には影響しない．また (10.20) の $\hat{\mathscr{H}}$ を具体的に計算するには，定理 15.23 の (8.7) 式を用いればよい．そしてその際現われる整関数だけの任意性は，$f(x)$ が $\mathscr{H}f(x)$ をもつこと，したがって $F(z)$ が標準母関数であることを考慮すればある程度確定することができる．

なお，$\alpha(x)=\pm i$ のばあいは (10.20) の解は成り立たない．このばあいは改めて議論する必要がある．

$\alpha=i$ のばあい，(10.4)，(10.5) は簡単化されて

$$[F(x)]_-=-\frac{i}{2}\beta(x)$$

となる．したがって，解が存在するためには $\beta(x)$ は下超関数でなければならない．そのばあい解は

$$f(x)=[F(x)]_+-[F(x)]_-=[F(x)]_++\frac{i}{2}\beta(x) \qquad (10.22)$$

で与えられる．ただし，$[F(x)]_+$ は任意の上超関数である．もちろん $\mathscr{H}f(x)$ が存在するようなものでなければならない．

$\alpha=-i$ のばあいは，上と同様の考察で

$$f(x)=-\frac{i}{2}\beta(x)-[F(x)]_- \qquad (10.23)$$

が得られる．ただし，$\beta(x)$ は上超関数でなければならず，$[F(x)]_-$ は任意の下超関数である．

最後に，§5 の Riemann–Hilbert の問題との関係を考えよう．(5.1) の条件を

$$a(x)\mathrm{Re}[\Phi(x)]_++b(x)\,\mathrm{Im}[\Phi(x)]_+=c(x) \qquad (10.24)$$

と書きかえる．つまり，上半平面 $\mathrm{Im}\,z>0$ で正則な解析関数 $\Phi(z)$ を (10.24) の条件のもとに求めようというのである．いま，$\Phi(z)$ は $\mathrm{Im}\,z\to+\infty$ のとき $\Phi(z)\to\mathrm{const}$ という条件を満足するものと仮定しよう．このばあい

$$F(z)=[\Phi(z),\,-\overline{\Phi}(z)] \qquad (10.25)$$

を考えると，

$$\overline{F}(z)=[-\Phi(z),\ \overline{\Phi}(z)]=-F(z) \qquad (10.26)$$

であるから，$F(z)$ は虚数型である (定義 3.5)．そして $\mathrm{Im}\,z\to\pm\infty$ での条件から，$F(z)$ は標準母関数になり得ることがわかる．また

$$[F(x)]_+=[\Phi(x)]_+,$$
$$[F(x)]_-=[\overline{\Phi}(x)]_-=-\overline{[\Phi(x)]_+} \qquad \because\ (7.4.3)$$

である．したがって

$$\mathrm{Re}\,[\Phi(x)]_+ = \frac{1}{2}\{[F(x)]_+ - [F(x)]_-\},$$

$$\mathrm{Im}\,[\Phi(x)]_+ = \frac{1}{2i}\{[F(x)]_+ + [F(x)]_-\}.$$

これらを (10.24) に代入して整理すると

$$[F(x)]_+ = A(x)[F(x)]_- + B(x) \tag{10.27}$$

の形になる．ただし

$$A(x) = \frac{a(x)+ib(x)}{a(x)-ib(x)}, \quad B(x) = \frac{2c(x)}{a(x)-ib(x)} \tag{10.28}$$

である．すなわち (10.4) の問題に帰着した．(10.24), (10.4) の問題をともに Riemann–Hilbert の問題とよんでもよいことはこれから明らかであろう．

(10.9), (10.14) の $A(x)$, $B(x)$ として (10.28) を使うと，ただちに

$$F(z) = \varphi(z)\mathrm{G.\hat{F}.}\left\{\frac{2c(x)}{a(x)-ib(x)}\cdot\frac{1}{[\varphi(x)]_+}\right\}, \tag{10.29}$$

$$\varphi(z) = \exp\left[\mathrm{G.\hat{F}.}\left\{\log\frac{a(x)+ib(x)}{a(x)-ib(x)}\right\}\right] \tag{10.30}$$

が得られる．この $F(z)$ の上成分がすなわち求める解 $\Phi(z)$ である．

ここで注意すべきことは，$a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ は一般に複素数値をとってもよいことである．この点で，ここのとり扱いは §5 のとり扱いよりもすぐれているといえるだろう．$a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ が実数値関数のばあいには，もちろんここの解は前のものと一致する．読者の演習問題としよう．

以上を定理としてまとめておく．

[定理 12]　$\mathscr{H}f(x)=\alpha(x)f(x)+\beta(x)$ の解は，もし存在すれば，

$$f(x) = -\frac{\alpha\beta}{\alpha^2+1} - \frac{1}{\gamma(\alpha^2+1)^{1/2}}\hat{\mathscr{H}}\left\{\frac{\beta\gamma}{(\alpha^2+1)^{1/2}}\right\},$$

$$\gamma(x) = \exp\left\{\frac{i}{2}\hat{\mathscr{H}}\log\frac{\alpha(x)+i}{\alpha(x)-i}\right\}$$

で与えられる．ただし $\alpha=\pm i$ のばあいは例外的に

$$f(x) = [F(x)]_+ + \frac{i}{2}\beta(x), \qquad \alpha=i$$

$$f(x) = -\frac{i}{2}\beta(x) - [F(x)]_-, \qquad \alpha=-i$$

である．ここで $\beta(x)$ は下(上)超関数，$[F(x)]_\pm$ は任意の上(下)超関数である．

[定理 13] $\mathrm{Im}\,z\geqq 0$ で正則で，$[F(x)]_+=A(x)[F(x)]_-+B(x)$ を満たす解析関数 $F(z)$ は

$$F(z)=\varphi(z)\mathrm{G.\hat{F}.}\left\{\frac{B(x)}{[\varphi(x)]_+}\right\},$$
$$\varphi(z)=\exp[\mathrm{G.\hat{F}.}\{\log A(x)\}]$$

で与えられる.

[定理 14] $\mathrm{Im}\,z>0$ で正則で，$\mathrm{Im}\,z\to+\infty$ のとき $F(z)\to\mathrm{const}$ となり，$a(x)\mathrm{Re}[F(x)]_++b(x)\,\mathrm{Im}[F(x)]_+=c(x)$ を満たす解析関数 $F(z)$ は，もし存在すれば，

$$F(z)=\varphi(z)\mathrm{G.\hat{F}.}\left\{\frac{2c(x)}{a(x)-ib(x)}\cdot\frac{1}{[\varphi(x)]_+}\right\},$$
$$\varphi(z)=\exp\left[\mathrm{G.\hat{F}.}\left\{\log\frac{a(x)+ib(x)}{a(x)-ib(x)}\right\}\right]$$

で与えられる.

§11. $\int_{-1}^{1} f(t)\log|t-x|dt=g(x)$, $-1<x<1$

積分方程式:

$$\int_{-1}^{1} f(t)\log|t-x|dt=g(x),\quad -1<x<1 \tag{11.1}$$

を考えよう．$f_0(x)=\mathscr{P}_{-1}^{1}f(x)\equiv f(x)H(x;-1,1)$ とおけば，(11.1) は

$$f_0(x)*\log|x|=g(x),\quad -1<x<1 \tag{11.2}$$

のように，‘たたみこみ’の方程式の形に表わされる．両辺を x について微分すると

$$f_0(x)*\frac{1}{x}=g'(x)$$

となり，$*(-1/\pi x)=\mathscr{H}$ であるから，これは

$$\mathscr{H}f_0(x)=-\pi^{-1}g'(x),\quad -1<x<1 \tag{11.3}$$

と書ける．定理 10 によれば，(11.3) を満足する $f_0(x)$ はつねに存在し，たとえば (9.18) を使うと，$-1<x<1$ に対して

$$f_0(x)=\frac{1}{\pi|Q(x)|}\mathscr{H}\{|Q(x)|g'(x)H(x;-1,1)\}+\frac{A}{|Q(x)|} \tag{11.4}$$

で与えられる．ただし，$|Q(x)|=\sqrt{1-x^2}$，A は任意定数である．((9.18) の $g(x)$ が (11.3) の $-g'(x)$ に相当する．また (9.18) の付加項のうち $n=0$ に

対するものだけをとり出して $A|Q(x)|^{-1}$ と書いてある.)

(11.2) と (11.3) とは完全に同等とはいえないから, (11.4) の $f_0(x)$ はいわば (11.2) の解の候補者である. そこで, (11.4) を (11.2) に代入して, 実際にその解になっていることを確かめる. それによって任意定数 A の値が決定されるだろう.

さて, 例 8 の公式 (9.23) によれば, (11.4) は

$$f_0(x)=\frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\left[|Q(x)|\mathscr{H}\left\{\frac{g(x)H(x;-1,1)}{|Q(x)|}\right\}\right]+\frac{A}{|Q(x)|},$$

$$-1<x<1 \qquad (11.5)$$

のように表わすことができる. これを (11.2) に代入し, 一般的に成り立つ関係:

$$\frac{d}{dx}\left\{f(x)*\log|x|\right\}=f(x)*\frac{d}{dx}\log|x|=f(x)*\frac{1}{x}=-\pi\mathscr{H}f(x)$$

を使えば,

$$-\mathscr{H}\mathscr{P}^1_{-1}[|Q(x)|\mathscr{H}\mathscr{P}^1_{-1}\{|Q(x)|^{-1}g(x)\}]$$
$$+A|Q(x)|^{-1}H(x;-1,1)*\log|x|=g(x), \qquad -1<x<1$$

となる. ここで定理 11 の (9.20) の関係を使うと

$$A|Q(x)|^{-1}H(x;-1,1)*\log|x|$$
$$=\pi^{-1}\int_{-1}^{1}|Q(x)|^{-1}g(x)dx, \qquad -1<x<1 \qquad (11.6)$$

が得られる. さて

$$|Q(x)|^{-1}H(x;-1,1)*\log|x|=\int_{-1}^{1}\frac{\log|x-t|}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

が $-1<x<1$ で定数になることは

$$\frac{d}{dx}\{|Q(x)|^{-1}H((x;-1,1)*\log|x|\}$$
$$=-\pi\mathscr{H}\{|Q(x)|^{-1}H(x;-1,1)\}$$
$$=\pi|Q(x)|^{-1}\operatorname{sgn}(x;-1,1) \qquad \because \quad (15.6.14)$$

からただちにわかる. その値 C を求めるには, たとえば $x=0$ での値を計算すればよい. すなわち

$$C=\int_{-1}^{1}\frac{\log|t|}{\sqrt{1-t^2}}dt=2\int_{0}^{1}\frac{\log t}{\sqrt{1-t^2}}dt=-\pi\log 2$$

である. したがって, (11.6) から

$$A=-\frac{1}{\pi^2\log 2}\int_{-1}^{1}\frac{g(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad (11.7)$$

が得られる．これを (11.4) に代入すれば，(11.1) の解が確定する．

さて，上のとり扱いでは，(9.18) の付加項のうち初項だけをとり上げ

$$R_1(x)=\frac{1}{|Q(x)|}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{c_n}{(x+1)^n}+\frac{c_n'}{(x-1)^n}\right\}$$

を除外した．容易に確かめられるように，これは

$$R_1(x)=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{|Q(x)|}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{d_n}{(x+1)^n}+\frac{d_n'}{(x-1)^n}\right\}\right]\equiv\frac{d}{dx}R_0(x)$$

の形に書きかえられる．ただし，d_n, d_n' は c_n, c_n' によって定まる定数である．$\mathcal{P}_{-1}^{1}R_0(x)\equiv R_0(x)H(x;-1,1)$ は $\mathcal{H}f(x)=0$ の解であるから，

$$\mathcal{P}_{-1}^{1}R_1(x)*\log|x|=\mathcal{P}_{-1}^{1}R_0(x)*\frac{1}{x}=-\pi\mathcal{H}\mathcal{P}_{-1}^{1}R_0(x)=0.$$

すなわち，$R_1(x)$, $a<x<b$, は同次方程式 $\int_{-1}^{1}f(t)\log|t-x|dt=0$ の一般解なのである．

以上を定理としてまとめておこう．

[定理 15] 積分方程式：

$$\int_{-1}^{1}f(t)\log|t-x|dt=g(x),\quad -1<x<1,$$

の解は

$$f(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\mathcal{H}\{\sqrt{1-x^2}\,g'(x)\,H(x;-1,1)\}+\frac{A}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{c_n}{(x+1)^n}+\frac{c_n'}{(x-1)^n}\right\},\qquad -1<x<1 \tag{11.8}$$

$$A=-\frac{1}{\pi^2\log 2}\int_{-1}^{1}\frac{g(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \tag{11.9}$$

で与えられる．ただし，c_n, c_n' は任意定数である．

例 10 積分方程式：

$$\int_{-1}^{1}f(t)\log|t-x|dt=x^n,\quad -1<x<1 \tag{11.10}$$

の解は

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{\pi\log 2}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & (n=0)\\[2ex] -\dfrac{1}{\pi}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}, & (n=1)\\[2ex] \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{1}{2\pi\log 2}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & (n=2)\end{cases}$$

である.

ヒント 定理 15 と公式 (15.6.25) を使え.

§12. ま と め

Hilbert 変換を応用する例として，まず，半平面および円に関する Poisson-Schwarz の積分公式を導いた．つぎに，境界上の一部で実数部，残りの部分で虚数部を与えて解析関数を決定するという形に Poisson-Schwarz の積分公式を一般化した．この一般化された公式は多くの問題できわめて有力な道具になる．この公式に密接に関連するものとして，$\int_a^b f(t)(t-x)^{-1}dt=g(x)$，$a<x<b$，という形の積分方程式がある．これは Hilbert 変換を利用してとり扱うことができる．この章では，$a=-\infty$，$b=\infty$; $a=0$，$b=\infty$; $-\infty<a<b<\infty$ の 3 つのばあいに分けて詳しく議論した．さらにこの積分方程式を一般化した方程式: $\mathcal{H}f(x)=\alpha(x)f(x)+\beta(x)$ をとり扱った．これはいわゆる Riemann–Hilbert の問題と同等である．最後に，積分方程式: $\int_{-1}^1 f(t)\log|t-x|dt=g(x)$，$-1<x<1$，を Hilbert 変換の応用例としてとり扱った.

17 積分方程式

§1. はじめに

前章では Hilbert 変換に関連する積分方程式をいくつかとり上げ，超関数が計算の道具としていかに便利なものであるかを見て来た．ただ，前章の目的は Hilbert 変換の応用を示すことであったので，積分方程式といっても，きわめて特殊なものに限られていた．そこで，この章では，もっと広い範囲から典型的な積分方程式を選び，超関数論によるとり扱いの方法を説明することにする．

§2. 積分方程式の種類

積分方程式の解法に超関数を使うのに先立って，ふつうお目にかかる積分方程式について簡単に説明しておこう．

$$\varphi(x) = \int_a^b K(x,t)f(t)dt, \qquad \text{F.1}$$

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda\int_a^b K(x,t)f(t)dt, \qquad \text{F.2}$$

$$\varphi(x) = \int_a^x K(x,t)f(t)dt, \qquad \text{V.1}$$

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda\int_a^x K(x,t)f(t)dt \qquad \text{V.2}$$

の各方程式で $\varphi(x)$, $f(x)$ は $a<x<b$ で定義され，$K(x,t)$ は $a<x<b, a<t<b$ で定義された関数である．a, b, λ は定数で，$a=-\infty$, $b=\infty$ であってもよい．$\varphi(x)$, $K(x,t)$ が与えられたとき $f(x)$ を決定するのがわれわれの問題である．このとき，F.1, F.2 ; V.1, V.2 をそれぞれ **Fredholm の第1種**および**第2種の積分方程式** ; **Volterra の第1種**および**第2種の積分方程式**という．また，F.2, V.2 で $\varphi(x)=0$ のとき，**同次積分方程式**という．$K(x,t)$ は**核**とよばれる．$a=-\infty$, $b=\infty$ のどちらかが成り立つばあい，および $K(x,t)$ が不連続関数のばあい，積分方程式は**特異**であるという．後のばあい $K(x,t)$ は**特異核**であるという．

$K(x,t)$ は2変数 x, t の関数であるが，$x-t$ がひとかたまりになって現われ

$$K(x,t)=K(x-t) \tag{2.1}$$

の形をとるばあいは，以下に見るようにとり扱いが簡単である．そして，実際問題にもこの形の積分方程式に出合うことが多い．本書では，このばあいに議論をかぎろう．

まず，Fredholm の積分方程式については，$\mathfrak{P}_a^b f(x)\equiv f(x)H(x;a,b)$ を改めて $f(x)$ と書くことにすれば，F.1, F.2 はそれぞれ

$$\varphi(x)=f(x)*K(x), \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=f(x)-\lambda f(x)*K(x)\\&=f(x)*\{\delta(x)-\lambda K(x)\}\end{aligned} \tag{2.3}$$

のように**たたみこみの方程式**になる．ただし

$$f(x)*\delta(x)=f(x) \tag{2.4}$$

の関係を使った．

また，Volterra の積分方程式に対しては，$\mathfrak{P}_a^\infty f(x)\equiv f(x)H(x-a)$, $\mathfrak{P}_a^\infty\varphi(x)\equiv\varphi(x)H(x-a)$, $\mathfrak{P}_0^\infty K(x)\equiv K(x)H(x)$ をそれぞれ改めて $f(x), \varphi(x), K(x)$ と書くことにすれば，V.1, V.2 はそれぞれ (2.2), (2.3) の形になる．つまり，Fredholm の積分方程式のばあいと形式的に同じになる．しかも，

$$K_1(x)\equiv\delta(x)-\lambda K(x) \tag{2.5}$$

と書くことにすると，$K_1(x)$ は**既知の超関数**である．したがって，第1種，第2種に相当する (2.2), (2.3) の区別がなくなる．すなわち，$f(x), \varphi(x), K(x)$ を超関数と考えることにすれば，F.1, F.2, V.1, V.2 はすべて (2.2) に帰着されるのである．

§3. たたみこみ型の積分方程式の解法

核 $K(x,t)$ が $K(x-t)$ の形をもつばあい，**積分方程式はたたみこみ型**であるという．上に述べたように，このばあいは (2.2) のたたみこみの方程式に帰着する．つぎに，これが簡単に解けるばあいを考えよう．

(i) Fourier 変換が適用できるばあい

§13.12 で述べたように，適当な条件のもとに，“たたみこみの Fourier 変換は Fourier 変換の積に等しい”．そこで，この事実を (2.2) に適用する．$\mathfrak{F}f(x)=g(\xi)$, $\mathfrak{F}\varphi(x)=\phi(\xi)$, $\mathfrak{F}K(x)=L(\xi)$ とおけば，(2.2) から

$$\phi(\xi)=g(\xi)\cdot L(\xi) \tag{3.1}$$

が得られる．これを $g(\xi)$ についてとけば

$$g(\xi)=\frac{\psi(\xi)}{L(\xi)}. \tag{3.2}$$

これの Fourier 逆変換をとれば,

$$f(x)=\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\psi(\xi)}{L(\xi)}\right\} \tag{3.3}$$

として**形式的に**解が得られる.

以上は一見もっともらしいが, 実は (3.1) から (3.2) に移るところに問題がある. $L(\xi)$ は超関数であるから, $L(\xi)$ の逆数なるものは一般には存在しないのである. しかし, §4 の例で見るように, ばあいによっては (3.1) を満足する $g(\xi)$ を求めることができるので, この方法は一応試みる価値がある.

(ii) Fourier 変換が適用できないばあい

核 $K(x)$ に対して

$$K(x)*K^{\dagger}(x)\equiv\delta(x) \tag{3.4}$$

を満足するような超関数 $K^{\dagger}(x)$ を考える. これは, $K(x)$ の**たたみこみに関する逆数**とでもよぶべきものである.

さて, (2.2) の両辺と $K^{\dagger}(x)$ とのたたみこみをつくると

$$\begin{aligned}\varphi(x)*K^{\dagger}(x)&=\{f(x)*K(x)\}*K^{\dagger}(x)\\&=f(x)*\{K(x)*K^{\dagger}(x)\}\\&=f(x)*\delta(x)\\&=f(x).\end{aligned}$$

ただし, たたみこみの結合法則 (定理 13.12) と (2.4) の関係を使う. 上の式は

$$f(x)=\varphi(x)*K^{\dagger}(x) \tag{3.5}$$

と書きかえられるから, けっきょく, **たたみこみの方程式** (2.2) の解が得られたわけである.

このように, 問題は核の‘たたみこみに関する逆数’を求めることに帰着する. これは, つまり, もとの方程式 (2.2) で $\varphi(x)=\delta(x)$ という特別なばあいを解くことにほかならない.

例 1

$$\varphi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{t-x}dt. \tag{3.6}$$

これはすでにおなじみの Hilbert 変換に関連する積分方程式である (§16.7). このばあい

$$K(x)=-\frac{1}{x} \tag{3.7}$$

である. まず, 上の (i) の方法を試みよう. Fourier 変換の公式により

$$L(\xi)=\mathcal{F}K(x)=\pi i\operatorname{sgn}\xi. \tag{3.8}$$

$1/L(\xi)$ は存在しないから，(i) の方法は使えない！

そこで，(ii) の方法を試みる．それには $K^\dagger(x)$ を求めなければならない．例 13.3 により，われわれは

$$\frac{1}{x}*\frac{1}{x} = -\pi^2\delta(x) \tag{3.9}$$

の関係を知っている．これと (3.7), (3.4) を見比べると

$$K^\dagger(x) = \frac{1}{\pi^2}\frac{1}{x} \tag{3.10}$$

であることがただちにわかる．したがって，(3.5) により

$$f(x) = \frac{1}{\pi^2}\varphi(x)*\frac{1}{x} = -\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)}{t-x}dt \tag{3.11}$$

である．これはもちろん Hilbert 変換に関連してすでに知っている結果である．

§4. 応　用　例

積分方程式：

$$f(x)-\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-|x-t|}dt = \varphi(x) \tag{4.1}$$

を考えよう．これは

$$f(x)*\{\delta(x)-\lambda e^{-|x|}\} = \varphi(x) \tag{4.2}$$

と書ける．したがって，(2.2) と見比べて

$$K(x) = \delta(x)-\lambda e^{-|x|} \tag{4.3}$$

である．これから

$$L(\xi) = \mathcal{F}K(x) = 1-\frac{2\lambda}{1+k^2} = \frac{k^2-\sigma^2}{k^2+1}. \tag{4.4}$$

ただし，簡単のために

$$k = 2\pi\xi,\ \ \sigma^2 = 2\lambda-1 \tag{4.5}$$

とおいてある．

$L(\xi)$ は k，したがって ξ の解析関数で，$k=\pm\sigma$ に零点をもつ．ここで，ばあいが分かれる．

(i) σ が実数でないばあい

このばあい，$1/L(\xi)$ は ξ 軸上で正則な解析関数である．したがって，(3.2) は

$$g(\xi) = \frac{k^2+1}{k^2-\sigma^2}\psi(\xi)$$

となる．これの $\mathcal{F}^{-1}$ をとると

$$f(x) = \varphi(x)*K^\dagger(x) \tag{4.6}$$

が得られる．ただし

$$
\begin{aligned}
K^{\dagger}(x) &= \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{k^2+1}{k^2-\sigma^2}\right) \\
&= \mathcal{F}^{-1}\left\{1+\frac{1-\sigma^2}{k^2-\sigma^2}\right\} \\
&= \delta(x)+i(\lambda/\sigma)e^{i\sigma|x|}, \quad \mathrm{Im}\,\sigma>0
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

である．たたみこみを具体的に積分形で表わせば，

$$
f(x) = \varphi(x)+i\frac{\lambda}{\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{-\sigma|x-t|}dt, \quad \mathrm{Im}\,\sigma>0 \tag{4.8}
$$

として解が得られる．

（ii） **σ が実数のばあい**

これは，λ が実数で

$$
\lambda \geqq \frac{1}{2} \tag{4.9}
$$

のばあいである．(3.1) すなわち

$$
L(\xi)g(\xi) = \psi(\xi) \tag{4.10}
$$

を解くために，

$$
L^{-1}(\xi)\cdot L(\xi) = 1 \tag{4.11}
$$

を満足するような超関数 $L^{-1}(\xi)$ を求めよう．

$$
\frac{1}{L(\xi)} = \frac{k^2+1}{k^2-\sigma^2} \tag{4.12}
$$

は確かに (4.11) を満足する．しかし，これが唯一の解ではない！　実際，

$$
L^{-1}(\xi) = \frac{1}{L(\xi)}+X(\xi) \tag{4.13}
$$

とおけばわかるように，

$$
L(\xi)\cdot X(\xi) = 0 \tag{4.14}
$$

を満足するような‘超関数’$X(\xi)$ をつけ加えることができる．これは，$\sigma \fallingdotseq 0$ に対して，

$$
X(\xi) = c_1\delta(k-\sigma)+c_2\delta(k+\sigma) \tag{4.15}
$$

で与えられる．ただし，c_1, c_2 は任意定数である．

さて，(4.10) の両辺に $L^{-1}(\xi)$ を掛けると

$$
g(\xi) = \frac{k^2+1}{k^2-\sigma^2}\psi(\xi)+c_1'\delta(k-\sigma)+c_2'\delta(k+\sigma) \tag{4.16}
$$

が得られる．ただし，$c_1'=c_1\psi(\sigma)$, $c_2'=c_2\psi(-\sigma)$ である．(この際 $\psi(\xi)$ は

$k=\pm\sigma$ で正則と仮定しておく．さもなければ，$L^{-1}(\xi)$ と $\psi(\xi)$ の積は考えられない！ $L^{-1}(\xi)$ は $k=\pm\sigma$ に特異性をもつからである．）(4.16) の $\mathcal{F}^{-1}$ をとると

$$f(x)=\varphi(x)*K^{\dagger}(x)+c_1''e^{i\sigma x}+c_2''e^{-i\sigma x}. \tag{4.17}$$

ただし，$c_1''=c_1'/2\pi$, $c_2''=c_2'/2\pi$．また

$$K^{\dagger}(x)=\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{k^2+1}{k^2-\sigma^2}\right)=\delta(x)-\frac{\lambda}{\sigma}\sin\sigma|x| \tag{4.18}$$

である．(4.18) を使って (4.17) を具体的に書き表わすと，けっきょく

$$f(x)=\varphi(x)-\frac{\lambda}{\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\sin\sigma|x-t|\,dt$$
$$+A\sin\sigma x+B\cos\sigma x,\quad \lambda>\frac{1}{2} \tag{4.19}$$

が得られる．A, B は任意定数である．

$\sigma=0$, すなわち $\lambda=1/2$ のばあいにも同様の計算で

$$f(x)=\varphi(x)-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)|x-t|\,dt+A+Bx \tag{4.20}$$

が得られる．（読者の演習問題としよう．）

(4.8), (4.19), (4.20) によって，複素数 λ のすべてのばあいに対して積分方程式 (4.1) の解が求められたわけである．とくに注目すべきは，$\lambda\geqq 1/2$ のばあい解は一義的にきまらないことである．すなわち，$\varphi(x)=0$ に対する方程式，つまり同次積分方程式が 0 でない解をもつのである．

§5. 別　法

積分方程式 (4.1) は，核の関数形が簡単なので，つぎのような方法で解くこともできる．

定理 13.14 によれば，一般に

$$\frac{d}{dx}\{f_1(x)*f_2(x)\}=f_1(x)*\frac{d}{dx}f_2(x) \tag{5.1}$$

の関係が成り立つ．そこで，(4.2) を x について 2 回微分すれば

$$f(x)*\left\{\delta''(x)-\lambda\frac{d^2}{dx^2}e^{-|x|}\right\}=\varphi''(x). \tag{5.2}$$

ところが

$$e^{-|x|}=e^{-x}H(x)+e^{x}H(-x)$$

を 2 回微分することにより

$$\frac{d^2}{dx^2}e^{-|x|}=e^{-|x|}-2\delta(x)$$

が得られるから，これを代入すると (5.2) は

$$f(x)*[\delta''(x)-\lambda\{e^{-|x|}-2\delta(x)\}]=\varphi''(x)$$

となる．この式から (4.2) を引くと

$$f(x)*\{\delta''(x)+(2\lambda-1)\delta(x)\}=\varphi''(x)-\varphi(x).$$

$$\therefore\quad f''(x)+(2\lambda-1)f(x)=\varphi''(x)-\varphi(x). \tag{5.3}$$

ただし，例 13.4 の関係

$$f(x)*\delta^{(n)}(x)=f^{(n)}(x) \tag{5.4}$$

を使う．(5.3) は $f(x)$ に関する 2 階の線形常微分方程式であるから，容易に解が求められる．($f(x)-\varphi(x)\equiv f_1(x)$ とおいて，$f_1(x)$ に関する微分方程式と考えると簡単である.) すなわち

$$f(x)=\varphi(x)-\frac{2\lambda}{\sigma}\int_c^x \sin\sigma(x-t)\varphi(t)dt+Ae^{i\sigma x}+Be^{-i\sigma x}. \tag{5.5}$$

A, B, c は任意定数である．

とくに $\varphi(x)=0$ のばあい，すなわち同次方程式のばあいには，(5.5) は

$$f(x)=Ae^{i\sigma x}+Be^{-i\sigma x} \tag{5.6}$$

となる．

ここで注意すべきは，λ の値には なんらの制限もついていないことである．これは前節の結果，すなわち "σ が実数でなければ 同次方程式は 0 でない解をもたない" と矛盾するのではないだろうか？

そこで，(5.6) が実際にもとの 積分方程式 (4.1) を満たすかどうかを調べてみよう．もちろん，$f(x)$ は (4.1) の左辺の積分が 存在するようなものでなければならない．まず $Ae^{i\sigma x}$ を考えよう．

$$e^{i\sigma t}\cdot e^{-|x-t|}=\begin{cases} e^{x}\cdot e^{(i\sigma-1)t}, & t\to\infty \\ e^{-x}\cdot e^{(i\sigma+1)t}, & t\to-\infty \end{cases}$$

であるから，積分が存在するためには

$$-1<\mathrm{Im}\,\sigma<1 \tag{5.7}$$

でなければならない．これはまた十分条件でもある．$Be^{-i\sigma x}$ についてもまったく同じ条件 (5.7) が得られる．

けっきょく，σ が実数でなくても，(5.7) の条件を満たしさえすれば，同次方程式は 0 でない解をもつのである．

それでは，前節の方法では なぜ このような解が 得られなかったのであろうか？

$\sigma^{\pm i\sigma x}$ は σ が実数でなければ指数関数の因子を含むから，Fourier 変換は存在しない！ 前節の方法は Fourier 変換の存在を前提とするものであるから，$\sigma^{\pm i\sigma x}$ のような解が得られないのはむしろ当然というべきである．この点で，この節の方法は前節の方法にまさるものといえよう．しかし，この節の方法では，解の満たすべき必要条件——いまの例では微分方程式 (5.3) ——の解を求めるだけに終ってはならない．その解が実際もとの積分方程式を満足することを確かめる必要がある．このことをとくに強調しておきたい．なお，一般のばあいには，必ずしも (5.3) のような簡単な微分方程式が得られるとは限らないから，Fourier 変換の方法はより包括的であるともいえる．ただ忘れてはいけないことは，Fourier 変換をもたないような解がほかにあるかも知れないということである．

最後に，(4.19) と (5.5) の表式は一見異なるけれども，実は本質的に同じものであることを注意しておこう．すなわち

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\sin\sigma|x-t|\,dt$$
$$=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\sin\sigma(x-t)dt+\int_{\infty}^{x}\varphi(t)\sin\sigma(x-t)dt$$

の関係に注意する．(5.5) 式で任意定数 c として $-\infty, \infty$ をとり，それらを加えて 2 で割れば (4.19) が得られるのである．

§6. Volterra の積分方程式

同次積分方程式がパラメーター λ の適当な値に対して 0 でない解をもつとき，その解を積分方程式の**固有解**または**固有関数**といい，それに対する λ の値を**固有値**という．上の例では，$|\mathrm{Im}\sqrt{2\lambda-1}|<1$ であるような任意の複素数 λ が固有値である．積分方程式の理論では，特異でない Fredholm の積分方程式はたかだか可算個の固有値をもち，しかも固有値は $\pm\infty$ 以外には集積しないことが知られている．上の例は積分限界が $a=-\infty$, $b=\infty$ という特異積分方程式であって，そのために固有値の連続分布を許すのである．

これに反して Volterra の積分方程式には固有値がないこと，つまり 0 でない解が存在しないことが証明される．すなわち，つぎの定理が成り立つ．

[定理 1] Volterra の積分方程式は固有解をもたない．

（証明） Volterra の積分方程式は (2.3)，すなわち

$$f(x)*\{\delta(x)-\lambda K(x)\}=\varphi(x) \tag{6.1}$$

の形に表わされる．ただし $f(x)$, $\varphi(x)$, $K(x)$ はいずれも右超関数である．$\delta(x)$ は中央超関数であって，もちろん右超関数と考えることができる．したがって (6.1) の左辺の $\{\cdots\}$ は右超関数である．さて，同次方程式では $\varphi(x)=0$ である．(6.1) が積分方程式として意味があるためには，$\{\cdots\}\neq 0$ でなければならない．したがって，Titchmarsh の定理（定理 13.35）により，$f(x)=0$. すなわち，同次方程式は 0 でない解をもたない．∎

例 2 Volterra の積分方程式：

$$\int_0^x f(t)\cos(x-t)dt = \varphi(x) \tag{6.2}$$

を考える．これは

$$f(x)*K(x) = \varphi(x) \tag{6.3}$$

の形に表わされる．ただし $f(x)$, $\varphi(x)$ は右超関数であって

$$K(x) = \cos x\, H(x) \tag{6.4}$$

である．また，$H(x)$ は Heaviside 関数である．

§3 の（ii）の方法を応用しよう．

$$\begin{aligned} L(\xi) &= \mathcal{F}K(x) \\ &= \left[\int_0^\infty \cos x e^{-i\xi x}dx\right]_- \qquad \because \text{ 定理 } 7.7 \\ &= \left[\int_0^\infty \frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})e^{-ikx}dx\right]_- \\ &= \left[\frac{ik}{1-k^2}\right]_-. \end{aligned} \tag{6.5}$$

ただし，簡単のために $k=2\pi\xi$ とおいてある．$L(\xi)$ は下超関数であるから，四則演算が自由に行なえる（§12.7）．とくに，$1/L(\xi)$ が存在する．それゆえ，(3.4) の $K^\dagger(x)$ がつぎのように求められる．

$$\begin{aligned} \mathcal{F}K^\dagger(x) &= \frac{1}{L(\xi)} = \frac{1}{i}\left[\frac{1-k^2}{k}\right]_- \\ &= \frac{1}{i}\left\{\left[\frac{1}{k}\right]_- - k\right\} \\ &= \mathcal{F}\{H(x)+\delta'(x)\}. \end{aligned}$$

$$\therefore\ K^\dagger(x) = H(x)+\delta'(x). \tag{6.6}$$

これを (3.5) に代入すれば

$$\begin{aligned} f(x) &= \varphi(x)*\{H(x)+\delta'(x)\} \\ &= \varphi(x)*H(x)+\varphi(x)*\delta'(x) \\ &= \varphi(x)*H(x)+\varphi'(x) && (6.7) \\ &= \int_0^x \varphi(t)dt+\varphi'(x) && (6.7') \end{aligned}$$

が得られる．ただし(5.4)と(13.9.7)の関係式を利用する．(6.7),(6.7′)はそれぞれ超関数およびふつうの関数としての解を表わす．

例 3 積分方程式：

$$f(x)-\lambda\int_0^x e^{x-t}f(t)dt=\varphi(x) \tag{6.8}$$

の解は

$$f(x)=\varphi(x)+\lambda\int_0^x e^{(1+\lambda)(x-t)}\varphi(t)dt \tag{6.9}$$

である．

ヒント $K(x)=e^xH(x)$ は Fourier 変換をもたないから例 2 の方法は適用できない．しかし，§5 の方法は有効である．

§7. Abel の積分方程式

特異核をもつ Volterra の第 1 種積分方程式で有名なものに **Abel の積分方程式**がある．これは

$$\mathrm{pf}\int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}dt=\varphi(x), \quad \alpha \neq \text{整数} \tag{7.1}$$

のように表わされる．ふつう，$0<\alpha<1$ という条件がつけられる．そのばあい積分は収束するので，pf の記号は除かれる．ここでは任意の非整数の α について考えよう．例によって $\mathcal{P}_0^\infty f(x)\equiv f(x)H(x)$, $\mathcal{P}_0^\infty\varphi(x)\equiv\varphi(x)H(x)$ を改めて $f(x),\varphi(x)$ と書くことにすると，(7.1)は

$$f(x)*K(x)=\varphi(x), \tag{7.2}$$

$$K(x)=|x|^{-\alpha}H(x) \tag{7.3}$$

となる．これから，Fourier 変換の公式により

$$L(\xi)=\mathcal{F}K(x)=\Gamma(1-\alpha)[(j\xi)^{\alpha-1}]_- \tag{7.4}$$

が得られ，$L(\xi)$ は下超関数である．したがって

$$\mathcal{F}K^\dagger(x)=\frac{1}{L(\xi)}=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}[(j\xi)^{-\alpha+1}]_- \tag{7.5}$$

が存在する．この右辺の $[\cdots]_-$ は(7.4)の $[\cdots]_-$ で $\alpha\to 2-\alpha$ とおきかえたものであることに注意すれば

$$[(j\xi)^{-\alpha+1}]_-=\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\mathcal{F}\{|x|^{\alpha-2}H(x)\}$$

が得られ，これを(7.5)に代入すれば

$$K^\dagger(x)=\frac{\alpha-1}{\pi}\sin\pi\alpha|x|^{\alpha-2}H(x). \tag{7.6}$$

ただし，$\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha-1)=\pi\{(\alpha-1)\sin\pi\alpha\}^{-1}$ の関係を使う．したがって，(3.5) により，解はつぎのようになる．

$$f(x)=\frac{\alpha-1}{\pi}\sin\pi\alpha\{\varphi(x)*|x|^{\alpha-2}H(x)\}$$
$$=\frac{\alpha-1}{\pi}\sin\pi\alpha\cdot\mathrm{pf}\int_0^x\frac{\varphi(t)}{(x-t)^{2-\alpha}}dt. \tag{7.7}$$

この解はつぎのように変形することができる．(3.15.8) 式により

$$|x|^{\alpha-2}H(x)=\frac{1}{\alpha-1}\frac{d}{dx}\left\{|x|^{\alpha-1}H(x)\right\}$$

であるから，

$$\varphi(x)*|x|^{\alpha-2}H(x)=\frac{1}{\alpha-1}\varphi(x)*\frac{d}{dx}\left\{|x|^{\alpha-1}H(x)\right\}$$
$$=\frac{1}{\alpha-1}\varphi'(x)*|x|^{\alpha-1}H(x).\quad\because\ (5.1)$$

したがって

$$f(x)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\varphi'(x)*|x|^{\alpha-1}H(x). \tag{7.8}$$

ただし，ここで忘れてはならないのは，この $\varphi(x)$ が (7.1) の $\varphi(x)$ ではなくて，$\mathcal{P}_0^\infty\varphi(x)\equiv\varphi(x)H(x)$ であることである．とくに $\varphi(x)$ が $x=0$ で正則のばあいには

$$\mathcal{P}_0^\infty\varphi(x)=\varphi(x)\cdot H(x) \tag{7.9}$$

のように，Heaviside 関数 $H(x)$ との積として表わされる．したがって

$$\frac{d}{dx}\mathcal{P}_0^\infty\varphi(x)=\varphi'(x)\cdot H(x)+\varphi(x)\cdot\delta(x)$$
$$=\varphi'(x)\cdot H(x)+\varphi(0)\delta(x). \tag{7.10}$$

これを (7.8) に代入すれば

$$f(x)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\left\{\mathrm{pf}\int_0^x\frac{\varphi'(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt+\varphi(0)x^{\alpha-1}\right\}\qquad(x>0) \tag{7.11}$$

が得られる．Re $\alpha>0$ ならば，積分は収束するから，pf の記号を除くことができる．つまり

$$0<\mathrm{Re}\,\alpha<1 \tag{7.12}$$

の条件のもとでは，積分方程式 (7.1) と解 (7.11) の両方で pf の記号は省略されるのである．

与えられた $\varphi(x)$ が $x=0$ で正則でないばあい，たとえば $\varphi(x)=x^\beta$ のばあいには，つぎの式を使えばよい．

$$\mathfrak{P}_0^\infty x^\beta = |x|^\beta H(x). \tag{7.13}$$

なお，(7.8) に対して上と同様の操作をくり返すことにより

$$f(x) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-2)}\varphi^{(n)}(x) * |x|^{\alpha-n}H(x) \quad (n=2,3,\cdots) \tag{7.14}$$

が得られることは明らかであろう．

以上は $\alpha \neq$ 整数のばあいの議論であるが，$\alpha=$整数の ばあいについても同様のとり扱いができる． ただ (7.4) の $L(\xi)$ の式などが多少複雑になるだけである．(興味をもたれる読者の研究にまかせる．)

例 4　つぎの関係が成り立つ．

$$|x|^\alpha H(x) * |x|^\beta H(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}|x|^{\alpha+\beta+1}H(x),$$

$$|x|^\alpha H(x) * |x|^{-(\alpha+n)}H(x) = \frac{(-1)^n\pi}{\sin \pi\alpha}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+n)}\delta^{(n-2)}(x),$$

$$|x|^\alpha H(x) * x^{-m}H(x)$$
$$= \frac{(-1)^{m-1}\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(m)\Gamma(\alpha-m+2)}\{\psi(m)-\psi(\alpha-m+2)+\log|x|\}\,|x|^{\alpha-m+1}H(x),$$

$$x^{-m}H(x) * x^{-n}H(x)$$
$$= \frac{\Gamma(m+n-1)}{\Gamma(m)\Gamma(n)}\{\psi(m)+\psi(n)-2\psi(m+n+1)+2\log|x|\}\frac{H(x)}{x^{m+n-1}}$$
$$+\frac{(-1)^{m+n}}{\Gamma(m)\Gamma(n)}[\{\psi(m+n-1)-\psi(m)\}\{\psi(m+n-1)-\psi(n)\}$$
$$+\psi'(m+n-1)]\delta^{(m+n-2)}(x),$$

$$x^n H(x) * x^{-m}H(x) = (-1)^{n+1}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m-n+1)}{\Gamma(m)}x^{n-m+1}H(x)$$
$$+(-1)^{m-1}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(m)}\{\psi(m)-\psi(m-n-1)\}\delta^{(m-n-2)}(x).$$

ただし，α, β は任意の複素数，m, n は正の整数で，公式の右辺が意味をもつようなものとする．

ヒント　Fourier 変換を利用すれば容易に証明できる．】

例 5　$\varphi(x)=x^\beta$ に対する (7.1) の解は

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin \pi\alpha}{\pi}\dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta)}|x|^{\alpha+\beta-1}H(x), \\[2ex] \dfrac{\sin \pi\alpha}{\pi}\dfrac{(-1)^{n-1}\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-n)\Gamma(n)}\{\psi(n)-\psi(\alpha-n)+\log|x|\}\,|x|^{\alpha-n-1}H(x), \\[2ex] \dfrac{(-1)^m\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+m)}\delta^{(m)}(x). \end{cases}$$

ただし， 上から順に $\alpha+\beta \neq -m$, $\beta \neq -n$; $\beta=-n$; $\beta=-(\alpha+m)$ のばあいに対応する．また，$m=0,1,2,\cdots$; $n=1,2,\cdots$ である．

ヒント　例4の公式を利用すればよい．

注意　上の解で $\delta^{(m)}(x)$ が現われるのは一見奇妙であるが，**これはつぎの事情による．** $f(x)$ を $\mathcal{P}_0^\infty f(x)$ と見直すとき，$x=0$ での**一般 δ 関数**をつけ加えた $\mathcal{P}_{-0}^\infty f(x)\equiv f(x)H(x)+\delta_\infty(x)$ を採用しても，これまでの議論はそのまま成り立つ．その際 $\varphi(x)$ として $\delta_\infty(x)$ を含まない**ふつうの関数**を与えても，解 $f(x)$ としては $\delta_\infty(x)$ を含む超関数が現われるのである．もし解をふつうの関数に限れば，そのばあい解は存在しないことになる．たとえば，$\alpha=1/2$, $\varphi(x)=-x^{-1/2}$ のばあいを考えてみよ．

§8.　$\int_0^\infty f(t)e^{-|x-t|}dt=g(x),\ \ x>0$

これは Fredholm の積分方程式である．$\mathcal{P}_{-0}^\infty f(x)=f_0(x)$ とおくと

$$f_0(x)*e^{-|x|}=g(x),\qquad x>0 \tag{8.1}$$

である．さて

$$e^{-|x|}=e^{-x}H(x)+e^{x}H(-x) \tag{8.2}$$

であるから

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}e^{-|x|}&=-e^{-x}H(x)+e^{-x}\delta(x)+e^{x}H(-x)-e^{x}\delta(x)\\&=-e^{-x}H(x)+e^{x}H(-x),\\ \frac{d^2}{dx^2}e^{-|x|}&=e^{-x}H(x)-e^{-x}\delta(x)+e^{x}H(-x)-e^{x}\delta(x)\\&=e^{-|x|}-2\delta(x)\end{aligned} \tag{8.3}$$

の関係がある．したがって，(8.1) の両辺を x について2回微分すれば

$$f_0(x)*\{e^{-|x|}-2\delta(x)\}=g''(x),\qquad x>0$$

が得られる．ここで (8.1) を代入し，$f_0(x)*\delta(x)=f_0(x)$ の関係を使うと

$$f_0(x)=\frac{1}{2}\mathcal{P}_0^\infty\{g(x)-g''(x)\},\qquad x>0 \tag{8.4}$$

が得られる．ところが，$f_0(x)=\mathcal{P}_{-0}^\infty f(x)$ であるから

$$f_0(x)=0,\qquad x<0 \tag{8.5}$$

である．$x=0$ を含む区間では，一般 δ 関数 $\delta_\infty(x)$ をつけ加えた

$$f_0(x)=\frac{1}{2}\mathcal{P}_0^\infty\{g(x)-g''(x)\}+\sum_{n=0}^\infty c_n\delta^{(n)}(x) \tag{8.6}$$

が解の候補者である．そして，Σ の項は同次方程式の解である．そこで，これを (8.1) に代入すると

$$\sum_{n=0}^\infty c_n\delta^{(n)}(x)*e^{-|x|}=0,\qquad x>0 \tag{8.7}$$

であればよいことがわかる.

$$\delta^{(n)}(x)*e^{-|x|}=\frac{d^n}{dx^n}e^{-|x|}=(-1)^n e^{-x}, \qquad x>0$$

であるから，(8.7) の条件は

$$c_0-c_1+c_2-c_3+\cdots=0 \tag{8.8}$$

となる．とくに，$c_0=c_1$, $c_2=c_3=\cdots=0$ として得られる $c_0\{\delta(x)+\delta'(x)\}$ は解である．また，これを x について任意の回数微分したものも解である．そこで，それらの線形結合をとって得られる

$$f_0(x)=\frac{1}{2}\mathcal{P}_0^\infty\{g(x)-g''(x)\}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n\{\delta^{(n)}(x)+\delta^{(n+1)}(x)\} \tag{8.9}$$

が一般解である．(8.6) の形では係数 c_n に (8.8) の条件がつくが，(8.9) では係数 a_n はまったく任意である．

§9. $\int_0^1 f(t)|x-t|^{-\alpha}dt=g(x), \qquad 0<x<1$

これは Abel の積分方程式を Fredholm 型にしたものである．ふつうの積分として左辺が存在するためには Re $\alpha<1$ の条件が必要であるが，超関数の範囲では α は任意の複素数としてもよい．いま α は非整数として

$$F(z)=\int_0^1\frac{f(t)}{(z-t)^\alpha}dt \tag{9.1}$$

を考える．これは Im $z\gtrless 0$ に対して正則であるから，**標準型母関数**である (§15.7)．そして，それの与える上・下超関数は

$$[F(x)]_\pm=\begin{cases}\displaystyle\int_0^1\frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}dt, & x>1 \qquad (9.2)\\[2ex] \displaystyle\int_0^x\frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}dt+e^{\mp\alpha\pi i}\int_x^1\frac{f(t)}{(t-x)^\alpha}dt, & 0<x<1 \qquad (9.3)\\[2ex] \displaystyle e^{\mp\alpha\pi i}\int_0^1\frac{f(t)}{(t-x)^\alpha}dt, & x<0 \qquad (9.4)\end{cases}$$

である．さて，標題の積分方程式は

$$\int_0^x\frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}dt+\int_x^1\frac{f(t)}{(t-x)^\alpha}dt=g(x), \qquad 0<x<1 \tag{9.5}$$

と書き表わされる．ところが，(9.3) から

$$\int_0^x\frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}dt=\frac{1}{2i\sin\pi\alpha}\{e^{\alpha\pi i}[F(x)]_+-e^{-\alpha\pi i}[F(x)]_-\}, \tag{9.6}$$

$$\int_x^1\frac{f(t)}{(t-x)^\alpha}dt=\frac{-1}{2i\sin\pi\alpha}\{[F(x)]_+-[F(x)]_-\} \tag{9.7}$$

が得られるから，これらを(9.5)に代入すると，容易に

$$[F(x)]_+=e^{(1-\alpha)\pi i}[F(x)]_-+2e^{-\alpha\pi i/2}\cos\frac{\pi}{2}\alpha\, g(x),\quad 0<x<1 \tag{9.8}$$

の関係が成り立つことがわかる．一方，(9.2)，(9.4)からただちに

$$[F(x)]_+=[F(x)]_-,\qquad x>1 \tag{9.9}$$

$$[F(x)]_+=e^{2(1-\alpha)\pi i}[F(x)]_-,\qquad x<0 \tag{9.10}$$

が得られる．そこで

$$A(x)=\begin{cases}1, & x>1\\ e^{(1-\alpha)\pi i}, & 0<x<1\\ e^{2(1-\alpha)\pi i}, & x<0\end{cases} \tag{9.11}$$

$$B(x)=2e^{-\alpha\pi i/2}\cos\frac{\pi}{2}\alpha\, g(x)H(x;0,1) \tag{9.12}$$

とおけば，(9.8)～(9.10)は

$$[F(x)]_+=A(x)[F(x)]_-+B(x) \tag{9.13}$$

の形にまとめられる． これは Riemann–Hilbert の問題に ほかならない． したがって定理 16.13 が適用できる．

まず

$$\begin{aligned}\log A(x)&=(1-\alpha)\pi i\, H(x;0,1)+2(1-\alpha)\pi i\, H(-x)\\&=(1-\alpha)\pi i\{H(1-x)-H(-x)+2H(-x)\}\\&=(1-\alpha)\pi i\{H(1-x)+H(-x)\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \text{G.}\hat{\text{F}}.\log A(x)&=-(1-\alpha)\pi i\{H(1-z)+H(-z)\}\\&=\frac{(1-\alpha)\pi i}{j}\{\text{Log}(z-1)+\text{Log}\, z\}\\&=\frac{1-\alpha}{2}\text{Log}\{z(z-1)\}.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \varphi(z)=\exp\{\text{G.}\hat{\text{F}}.\log A(x)\}=\{z(z-1)\}^{(1-\alpha)/2}. \tag{9.14}$$

$\varphi(z)$には$e^{\Phi(z)}$（$\Phi(z)$は整関数）だけの任意性があるが，結果には影響しないことを想い出しておこう．さて

$$[\varphi(x)]_\pm=e^{\pm(1-\alpha)\pi i/2}|\varphi(x)|,\qquad 0<x<1. \tag{9.15}$$

したがって，(9.12)により

$$\frac{B(x)}{[\varphi(x)]_+}=-2i\cos\frac{\pi}{2}\alpha\frac{g(x)}{|\varphi(x)|}H(x;0,1)$$

である．それゆえ

$$F(z)=\varphi(z)\,\mathrm{G.\hat{F}.}\left\{\frac{B(x)}{[\varphi(x)]_+}\right\}$$

$$=-2i\cos\frac{\pi}{2}\alpha\,\varphi(z)\,\mathrm{G.\hat{F}.}\{g(x)|\varphi(x)|^{-1}H(x;0,1)\} \tag{9.16}$$

である．さて，(9.16) の $\mathrm{G.\hat{F}}\{\cdots\}$ の $\{\cdots\}$ は中央超関数であるから，**標準母関数**が存在する．(それは定理 10.1 により $O(z^{-1})$ である.）したがって，$\Phi(z)$ を任意の整関数として

$$\mathrm{G.\hat{F}.}\{\cdots\}=\mathrm{G.\tilde{F}.}\{\cdots\}+\Phi(z)$$

と書くことができる．ところが，(9.1) の定義によれば，

$$F(z)\sim\frac{C}{z^{\alpha}},\qquad z\to\infty \tag{9.17}$$

である．ただし，$C=\int_0^1 f(t)dt$ とする．（もし $C=0$ ならば，$F(z)\sim C'z^{-(\alpha+1)}$，$C'=\alpha\int_0^1 f(t)tdt$ となる!）　(9.14) により $\varphi(z)\sim z^{1-\alpha}$ であるから，上の $\Phi(z)$ は実は 0 でなければならない．けっきょく，(9.16) は

$$F(z)=-2i\cos\frac{\pi}{2}\alpha\,\varphi(z)\,\mathrm{G.\tilde{F}.}\{g(x)|\varphi(x)|^{-1}H(x;0,1)\}$$

$$=-2i\cos\frac{\pi}{2}\alpha\,\varphi(z)\{\gamma(x)*\delta(z)\},$$

$$\gamma(x)=\frac{g(x)}{|\varphi(x)|}H(x;0,1) \tag{9.18}$$

となる．

これを (9.6) の右辺に代入すれば

$$\int_0^x\frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt=-\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{2}\alpha}\Big[e^{\alpha\pi i}[\varphi(x)]_+\{\gamma(x)*[\delta(x)]_+\}$$

$$-e^{-\alpha\pi i}[\varphi(x)]_-\{\gamma(x)*[\delta(x)]_-\}\Big]$$

$$=-\frac{|\varphi(x)|}{2\sin\frac{\pi}{2}\alpha}\Big[\gamma(x)*\Big\{e^{(1+\alpha)\pi i/2}[\delta(x)]_+$$

$$-e^{-(1+\alpha)\pi i/2}[\delta(x)]_-\Big\}\Big]\quad\because\ (9.15)$$

$$=-\frac{|\varphi(x)|}{2\sin\frac{\pi}{2}\alpha}\Big[\gamma(x)*\Big\{\frac{1}{2i}(e^{(1+\alpha)\pi i/2}-e^{-(1+\alpha)\pi i/2})\Big(-\frac{1}{\pi x}\Big)$$

$$+\frac{1}{2}(e^{(1+\alpha)\pi i/2}+e^{-(1+\alpha)\pi i/2})\delta(x)\Big\}\Big]$$

$$=-\frac{|\varphi(x)|}{2\sin\frac{\pi}{2}\alpha}\left\{\sin\frac{\pi}{2}(1+\alpha)\mathcal{H}\gamma(x)+\cos\frac{\pi}{2}(1+\alpha)\gamma(x)\right\}$$

$$=-\frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{2}\alpha|\varphi(x)|\mathcal{H}\gamma(x)+\frac{1}{2}|\varphi(x)|\gamma(x). \qquad (9.19)$$

ただし，$[\delta(x)]_\pm=-\frac{1}{jx}\pm\frac{1}{2}\delta(x)$ の関係を使った．

(9.19) は $f(x)$ に関する Abel の積分方程式であるから，(7.7) によって解が求まる．すなわち

$$f(x)=\frac{(\alpha-1)\sin\pi\alpha}{2\pi}\left[-\cot\frac{\pi}{2}\alpha|\varphi(x)|\mathcal{H}\left\{\frac{g(x)}{|\varphi(x)|}H(x;0,1)\right\}\right.$$
$$\left.+g(x)H(x;0,1)\right]*|x|^{\alpha-2}H(x) \qquad (9.20)$$

である．ただし，$|\varphi(x)|=(x-x^2)^{(1-\alpha)/2}$ である．

例 6 $g(x)=1$ のとき

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}\alpha\,(x-x^2)^{(\alpha-1)/2}.$$

Hilbert 変換の表から

$$\mathcal{H}|x|^{\alpha}|1-x|^{\beta}H(x;0,1)$$
$$=\frac{1}{\pi}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}F(1,-\alpha-\beta;1-\alpha;x)H(x;-1,1)$$
$$-\frac{1}{\pi}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}\frac{1}{x}F\left(1,\alpha+1;\alpha+\beta+2;\frac{1}{x}\right)\overline{H}(x;-1,1)$$
$$-|x|^{\alpha}|1-x|^{\beta}\{\cot\pi\alpha\,H(x;0,1)+\mathrm{cosec}\,\pi\alpha\,H(x;-1,0)\}. \qquad (9.21)$$

ここで $F(a,b;c;z)$ は超幾何関数である．$\alpha\to(\alpha-1)/2$, $\beta\to(\alpha-1)/2$ とおきかえれば，$0<x<1$ に対して

$$\mathcal{H}(x-x^2)^{(\alpha-1)/2}H(x;0,1)$$
$$=\frac{1}{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}F\left(1,1-\alpha;\frac{3-\alpha}{2};x\right)+\tan\frac{\pi}{2}\alpha\,(x-x^2)^{(\alpha-1)/2} \qquad (9.22)$$

が得られる．超幾何関数の性質により

$$F\left(1,1-\alpha;\frac{3-\alpha}{2};x\right)=\frac{1-\alpha}{2}(x-x^2)^{(\alpha-1)/2}\int_0^x(x-x^2)^{-(\alpha+1)/2}dx$$

と書き表わされるから，(9.22) を (9.20) に代入すれば，右辺の [$\cdots$] は

$$\frac{1}{\pi}\cot\frac{\pi}{2}\alpha\frac{\left[\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(\alpha)}(x-x^2)^{-(\alpha+1)/2}H(x;0,1)*H(x),\quad 0<x<1$$

となる．たたみこみの表を利用すれば

$$\{(x-x^2)^{-(\alpha+1)/2}H(x;0,1)*H(x)\}*|x|^{\alpha-2}H(x)$$
$$=(x-x^2)^{-(\alpha+1)/2}H(x;0,1)*\{|x|^{\alpha-2}H(x)*H(x)\}$$

$$= (x-x^2)^{-(\alpha+1)/2}H(x;0,1) * (\alpha-1)^{-1}|x|^{\alpha-1}H(x) \qquad \because \text{例}4$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\Gamma(\alpha-1)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}(x-x^2)^{(\alpha-1)/2}, \quad 0<x<1$$

のような変形ができるから，けっきょく(9.20)は

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}\alpha(x-x^2)^{(\alpha-1)/2} \tag{9.23}$$

を与える．

§10. 同次方程式の解

例6によれば

$$\frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}\alpha\,(x-x^2)^{(\alpha-1)/2}H(x;0,1)*|x|^{-\alpha}=1, \qquad 0<x<1 \tag{10.1}$$

が成り立つ．(実は，たたみこみの表からこの結果はただちに得られる！）そこで両辺をxについて微分すると，

$$\frac{d}{dx}\{(x-x^2)^{(\alpha-1)/2}H(x;0,1)\}*|x|^{-\alpha}=0, \qquad 0<x<1 \tag{10.2}$$

が得られる．すなわち，

$$\frac{d}{dx}\left\{(x-x^2)^{(\alpha-1)/2}H(x;0,1)\right\} = \left\{\frac{d}{dx}(x-x^2)^{(\alpha-1)/2}\right\}H(x;0,1)$$

は，§9の積分方程式：$f(x)H(x;0,1)*|x|^{-\alpha}=g(x)$ で $g(x)=0$ としたときの解になっている．ところが，このような解は(9.20)の公式には含まれていない．($g(x)=0$ とおけば $f(x)=0$ となるから.）なぜだろう？

要するに，(9.20)は特解であって一般解ではないのである．そこで，つぎに同次方程式

$$\int_0^1 f(t)|x-t|^{-\alpha}dt = 0, \qquad 0<x<1 \tag{10.3}$$

の一般解を求めよう．それと(9.20)を加えたものが，もとの積分方程式の一般解を与えるのである．

まず，(9.11)は

$$A(x)=\begin{cases}1, & x>1\\ e^{(1-\alpha)\pi i+n\,f}, & 0<x<1\\ e^{2(1-\alpha)\pi i+(m+n)\,f}, & x<0\end{cases}$$

と書くことができる．ここに，m, nは任意の整数である．したがって

$$\log A(x)=\left\{\frac{1}{2}(1-\alpha)+n\right\}jH(1-x)+\left\{\frac{1}{2}(1-\alpha)+m\right\}jH(-x)$$
$$=-j\,\text{H.F.}\left[\left\{\frac{1}{2}(1-\alpha)+n\right\}H(1-z)+\left\{\frac{1}{2}(1-\alpha)+m\right\}H(-z)\right]$$
$$=\text{H.F.}\left[\left\{\frac{1}{2}(1-\alpha)+n\right\}\text{Log}\,(z-1)+\left\{\frac{1}{2}(1-\alpha)+m\right\}\text{Log}\,z\right].$$

$$\therefore\quad \text{G.}\hat{\text{F}}.\log A(x)=\frac{1-\alpha}{2}\text{Log}\{z(z-1)\}+m\,\text{Log}\,z+n\,\text{Log}\,(z-1).$$

$$\therefore\quad \exp[\text{G.}\hat{\text{F}}.\log A(x)]=\{z(z-1)\}^{(1-\alpha)/2}z^m(z-1)^n. \tag{10.4}$$

さて，定理 16.13 により

$$F(z)=\chi(z)\,\text{G.}\hat{\text{F}}.\left\{\frac{B(x)}{[\chi(x)]_+}\right\}, \tag{10.5}$$

$$\chi(z)=\exp[\text{G.}\hat{\text{F}}.\{\log A(x)\}] \tag{10.6}$$

である．(混同を避けるために $\varphi(z)$ の代りに $\chi(z)$ と書いた.) 同次方程式に対しては $B(x)=0$ であるから，

$$\text{G.}\hat{\text{F}}.\left\{\frac{B(x)}{[\chi(x)]_+}\right\}=\text{G.}\hat{\text{F}}.\,0=\Phi(z).$$

ただし，$\Phi(z)$ は整関数である．ところが，(10.4), (9.14) により，

$$\chi(z)=z^m(z-1)^n\varphi(z),\quad \varphi(z)=\{z(z-1)\}^{(1-\alpha)/2} \tag{10.7}$$

である．また，(9.17) により

$$F(z)\sim Cz^{-\alpha},\qquad z\to\infty \tag{10.8}$$

でなければならない．(10.5) により

$$\Phi(z)=F(z)[\chi(z)]^{-1}$$
$$\sim z^{-\alpha-m-n+(\alpha-1)}=z^{-(m+n+1)},\qquad z\to\infty$$

であるから，整関数 $\Phi(z)$ は実は多項式でなければならない．そして，その次数に応じて整数 m, n に制限がつく．そこで，簡単に $\Phi(z)=\text{const}$ をとることにする．そうすれば，(10.5) は

$$F(z)=C\chi(z)=Cz^m(z-1)^n\varphi(z) \tag{10.9}$$

となり，$m+n<0$ の条件がつく．C は任意の定数である．(以後，$C=1$ としてとり扱う.) (10.9) から

$$[F(x)]_\pm=(-1)^n e^{\pm(1-\alpha)\pi i/2}x^m(1-x)^n|\varphi(x)|,\qquad 0<x<1.$$

これを (9.6) に代入すると

$$\int_0^x\frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}dt=\frac{\cos\frac{\pi}{2}\alpha}{\sin\pi\alpha}(-1)^n x^m(1-x)^n|\varphi(x)|. \tag{10.10}$$

これは Abel の積分方程式であるから，(7.7) によって解が求められる．すなわち

$$f(x)=(-1)^n\frac{(\alpha-1)\cos\frac{\pi}{2}\alpha}{\pi}$$
$$\times\{x^{m+(1-\alpha)/2}(1-x)^{n+(1-\alpha)/2}H(x;0,1)\}*|x|^{\alpha-2}H(x)$$
$$=\frac{(-1)^n\cos\frac{\pi}{2}\alpha\,\Gamma(\alpha)\Gamma\left(m+1+\frac{1-\alpha}{2}\right)}{\pi\Gamma\left(m+\frac{\alpha+1}{2}\right)}$$
$$\times x^m(1-x)^n(x-x^2)^{(\alpha-1)/2}F\left(m+n+1,\ \alpha-1\,;m+\frac{\alpha+1}{2}\,;x\right).\tag{10.11}$$

ただし，たたみこみの公式

$$x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}H(x;0,1)*|x|^{\gamma}H(x)$$
$$=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)}x^{\alpha+\gamma}(1-x)^{\beta+\gamma}F(\gamma+1,\alpha+\beta+\gamma\,;\alpha+\gamma+1\,;x)$$
$$\times H(x;0,1)+\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}x^{\gamma}F\left(-\gamma,\alpha\,;\alpha+\beta\,;\frac{1}{x}\right)H(x-1)\tag{10.12}$$

を使う．(10.11) の定数の因子を除いて

$$f_{m,n}(x)\equiv x^m(1-x)^n(x-x^2)^{(\alpha-1)/2}F\left(m+n+1,\alpha-1\,;m+\frac{\alpha+1}{2}\,;x\right)\tag{10.13}$$

と書くことにすると，これが同次方程式の一般解を表わすことになる．ただし，m,n は $m+n<0$ を満たす任意の整数である．そして超幾何関数は，実は $-(m+n)$ 次の多項式に簡単化されることが容易にわかる．

けっきょく，§9 の積分方程式の一般解は，(10.13) の任意定数倍と (9.20) の和として与えられる．任意定数を決定するには，たとえば $x=0$, $x=1$ での解の特異性に関する条件を考えればよい．

例 7　同次方程式の 1 つの解：

$$\frac{d}{dx}(x-x^2)^{(\alpha-1)/2}=\frac{\alpha-1}{2}\frac{1-2x}{x-x^2}(x-x^2)^{(\alpha-1)/2}$$
$$=\frac{\alpha-1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x}\right)(x-x^2)^{(\alpha-1)/2}$$

が，$f_{-1,0}(x)$ と $f_{0,-1}(x)$ の線形結合で表わされることを確かめよ．

§11.　超関数の積分

例2の Volterra の積分方程式：

$$\int_0^x f(t)\cos(x-t)dt = \varphi(x) \tag{11.1}$$

を解くのに，これを‘たたみこみ’の方程式：

$$f(x)*K(x) = \varphi(x), \qquad K(x) = \cos x\, H(x) \tag{11.2}$$

の形に表わし，解を

$$f(x) = \varphi(x)*H(x)+\varphi'(x), \tag{11.3}$$

$$f(x) = \int_0^x \varphi(t)dt+\varphi'(x) \tag{11.4}$$

のように2通りの形に求めた．そして，前者を超関数としての解，後者をふつうの関数としての解と称した．$\varphi(x)$ を超関数としても，$\int_0^x \varphi(t)dt$ は，x の実数値に対してある一定の（一般には）複素数値が対応するという意味で，x の‘ふつうの関数’とみなすべきものである．（超関数の積分としては，定義 2.13 により定積分 $\int_a^b \varphi(t)dt$ が定義されているだけである．この式で $a\to 0$, $b\to x$ としたものが $\int_0^x \varphi(t)dt$ である．）それゆえ，(11.4) の右辺の第1項はふつうの関数であり，したがって，左辺の $f(x)$ は当然ふつうの関数とみるべきものなのである．

しかし，$\int_0^x \varphi(t)dt$ は不定積分の形をしている．超関数の不定積分なるものは考えられないのだろうか？　もしそれが可能で，しかも1つの超関数を表わすというのであれば，(11.4) 自身が‘超関数としての解’を表わすことになり，きわめて便利であろう．

実は，微分演算の逆演算という意味で，超関数を‘積分する’という表現はこれまでしばしば使って来た．たとえば，“$f'(x)=0$ を積分すれば $f(x)=\text{const}$”というのは“$f(x)=\text{const}$ を微分すれば $f'(x)=0$”という意味であった．これまでのとり扱いでは，超関数を‘積分する’ことと超関数の‘定積分’とをまったく切りはなして考えて来た．ここで両者の関係を考えてみよう．

まず，‘積分する’ということに関連して，**不定積分**が定義される．

〔**定義 1**〕 超関数 $f(x)=\text{H.F.}F(z)$ は $x=a$ で積分可能とする．このとき，$f(x)$ の不定積分を

$$\int_a^x f(t)dt \overset{\text{def}}{=} \text{H.F.}\int_{a(\pm)}^z F(z)dz$$

$$\equiv \mathrm{H.F.}\left[\int_{a(+)}^{z} F_{+}(z)dz, \int_{a(-)}^{z} F_{-}(z)dz\right] \tag{11.5}$$

で定義する．ただし $\int_{a(+)}^{z}$，$\int_{a(-)}^{z}$ はそれぞれ $F_{+}(z)$，$F_{-}(z)$ の正則領域内で積分を行なうことを意味する．

この定義の合理性はつぎの定理から明らかであろう．

［定理 2］ 超関数 $f(x)$ の任意の不定積分を $f_1(x)=\int_a^x f(t)dt$ とすれば

（i） $f_1'(x)=\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x),$ (11.6)

（ii） $f_1(b)\equiv\{\mathrm{O.F.}\int_a^x f(t)dt\}_{x=b}=\int_a^b f(t)dt$ (11.7)

が成り立つ．ただし，$f(x)$ は $x=a$, $x=b$ で積分可能であるとする．

（証明） $f_1(x)=\mathrm{H.F.}F_1(z)$ とすれば，不定積分の定義により

$$F_1(z)=\int_{a(\pm)}^{z} F(z)dz \tag{11.8}$$

である．また，超関数の微分の定義 2.12 により

$$f_1'(x)=\mathrm{H.F.}F_1'(z)=\mathrm{H.F.}F(z)=f(x).$$

すなわち (11.6) が証明された．

(11.7) は定理 2.7 としてすでに実質的に証明されている．∎

この定理の（i）は超関数の不定積分の微分がもとの超関数であることを示し，（ii）は不定積分（それ自身超関数である）の値が定積分に等しいことを示す．すなわち，不定積分に対する上の定義はきわめて合理的であるといえるだろう．ただ注意しなければならないのは，不定積分と定積分が記号的に同じ形で表わされていることである．積分の上限が変数 x のばあいは不定積分，定数のばあいは定積分を表わすことはふつうの関数のときと同じであるが，超関数のばあいは不定積分 $\int_a^x$ を x に応じて変化する数値（関数）と考えてはいけない．$\mathrm{O.F.}\int_a^x$ をとってはじめて数値が得られるのである．

以上の点に注意をすれば，(11.4) の右辺の第 1 項を超関数の不定積分とみなすことによって，(11.4) を (11.3) とまったく同等な‘超関数としての解’と考えることができる．そして，たとえば定理 13.24 の (13.9.7) 式も，左辺の O.F. の記号をとり除いて $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$ という超関数に関する等式と見直すことができるのである．

定積分に関する定理 2.7 は不定積分に関する定理としてつぎのように表現す

ることができる.

[定理 3] 超関数 $f'(x)$ が $x=a$ で積分可能ならば

$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)dt \tag{11.9}$$

が成り立つ.

(証明) $f(x)=\text{H.F.}F(z)$ とすれば, $f'(x)=\text{H.F.}F'(z)$ である. 定義1により

$$\begin{aligned}\int_a^x f'(t)dt &= \text{H.F.}\left[\int_{a(+)}^z F_+'(z)dz,\ \int_{a(-)}^z F_-'(z)dz\right]\\ &= \text{H.F.}[F_+(z)-F_+(a),\ F_-(z)-F_-(a)]\\ &= \text{H.F.}[F_+(z),\ F_-(z)]-\text{H.F.}[F_+(a),\ F_-(a)].\end{aligned}$$

ところが, $[F_+(z),\ F_-(z)]=F(z)$. また

$$\begin{aligned}[F_+(a), F_-(a)] &= F_+(a)\mathbf{1}_+(z)-F_-(a)\mathbf{1}_-(z)\\ &= F_+(a)\left\{\mathbf{1}(z)+\frac{1}{2}\right\}-F_-(a)\left\{\mathbf{1}(z)-\frac{1}{2}\right\}\\ &= \left\{F_+(a)-F_-(a)\right\}\mathbf{1}(z)+\frac{1}{2}\left\{F_+(a)+F_-(a)\right\}\\ &\cong \{F_+(a)-F_-(a)\}\mathbf{1}(z)=f(a)\mathbf{1}(z).\end{aligned}$$

したがって

$$\int_a^x f'(t)dt=\text{H.F.}\{F(z)-f(a)\mathbf{1}(z)\}=f(x)-f(a)$$

である. これからただちに (11.9) が得られる. ∎

(11.9) の両辺の O.F. をとり $x=b$ とおけば 定理2.7 が得られることは明らかであろう.

なお, 定理13.24 はつぎのように一般化される.

[定理 4] 任意の超関数 $f(x)$ について

$$\int_a^x f(x)dx=\{f(x)H(x-a)\}*H(x)-\{f(x)H(a-x)\}*H(-x) \tag{11.10}$$

が成り立つ. ただし, $f(x)$ は $x=a$ で正則であるとする.

(証明) 仮定により $f(x)$ と $H(x-a)$, $H(a-x)$ の積が存在し (定義 12.2), $f(x)H(x-a)$, $f(x)H(a-x)$ はそれぞれ右および左超関数である. したがって, 定理 13.23 により, (11.10) の右辺は超関数として存在する. これを $f_1(x)$

としよう.

$$f_1'(x) = \{f(x)H(x-a)\}*\frac{d}{dx}H(x)$$
$$-\{f(x)H(a-x)\}*\frac{d}{dx}H(-x) \quad \because \text{ 定理 } 13.14$$
$$= \{f(x)H(x-a)\}*\delta(x)+\{f(x)H(a-x)\}*\delta(x)$$
$$= f(x)H(x-a)+f(x)H(a-x) \quad \because \text{ 定理 } 13.6$$
$$= f(x).$$

したがって，上の定理3の $f(x)$ としてここの $f_1(x)$ を使うと

$$f_1(x) = f_1(a)+\int_a^x f_1'(t)dt = f_1(a)+\int_a^x f(t)dt \tag{11.11}$$

が成り立つ．ところが $f_1(a)=0$ であることがつぎのようにしてわかる.

$$\text{O.F.}f_1(x) = \text{O.F.}[\{f(x)H(x-a)\}*H(x)]$$
$$-\text{O.F.}[\{f(x)H(a-x)\}*H(-x)]$$
$$= \left\{\int_a^x f(x)dx\right\}H(x-a)-\left\{\int_x^a f(x)dx\right\}H(a-x) \quad \because \text{ 定理 } 13.4$$
$$= \int_a^x f(x)dx.$$

ただし，$H(x-a)+H(a-x)=1$ の関係を使う．また，右辺の $\int_a^x$ は x を上限とする定積分を意味する（不定積分ではない!)．ここで $x=a$ とすれば，ただちに $f_1(a)=0$ が得られる．したがって (11.11) は (11.10) となる．∎

例 8 つぎの関係が成り立つ.

$$\int_a^x \delta'(x)dx = \delta(x), \qquad a \neq 0 \tag{11.12}$$

$$\int_a^b \delta'(x)dx = 0, \qquad a,b \neq 0. \tag{11.13}$$

(11.12) は超関数としての等式である．$\delta(a)=0$ $(a \neq 0)$ に注意すれば，定理3からただちに得られる．(11.13) は定積分の値を与える式である．これは (11.12) の O.F. をとり $x=b$ とおくことによっても得られる.

§12. ま と め

積分方程式で超関数がとくに有効に利用される例を選んで，そのとり扱い方を詳しく説明した．それらは一般に特異積分方程式とよばれるものである．ただし，たたみこみ型の積分方程式に考察を限った．Fredholm の積分方程式にいわゆる固有解が存在すること，これに反して Volterra の積分方程式には存在

しないことを知った．後者の例としてAbelの積分方程式をとり扱った．なお，これをFredholm型にした積分方程式はすこしめんどうであるが，超関数論の応用例として興味があるので，とくに詳細に議論した．超関数の‘積分’については本書ではもっぱら‘定積分’のみを考えて来た．しかし，超関数の‘不定積分’も考えられるので，補足の意味で本章で簡単に説明した．最後に，前の章でとり扱ったHilbert変換に関連する積分方程式というのは，実はFredholm型の特異積分方程式にほかならないことを注意しておこう．」

18 Laplace 変換

§1. はじめに

理工学のいろいろな問題をとり扱う際に，Laplace 変換が有力な道具として使われている．超関数論の立場で Laplace 変換を論ずれば，ふつうの関数について得られるよりもはるかに適用性の広い知識が得られるだろうとは当然期待されることである．しかし，実は，改めて Laplace 変換を論ずるまでもなく，Fourier 変換のひとつの異なる表現としてその理論の枠内におさまるのである．この章では，その事情を概説しよう．これによって，Laplace 変換に関する事柄はすべて Fourier 変換に還元して考えることができるだろう．

§2. Laplace 変換

たとえば初期値問題などでは，とり扱われる関数 $f(x)$ は区間 $x>0$ だけで定義されている．このようなばあい，Fourier 変換のかわりに Laplace 変換が便利な道具として使われる．

ふつうの関数 $f(x)$ に対して

$$\hat{f}(p) \equiv \mathcal{L}f(x) \overset{\text{def}}{=} \int_0^\infty f(x)e^{-px}dx \tag{2.1}$$

を $f(x)$ の **Laplace 変換**という．ここで p は複素数である．右辺の積分は $\mathrm{Re}\,p>\sigma_0$ なら収束し，$\mathrm{Re}\,p<\sigma_0$ なら発散するというぎりぎりの実数 σ_0 がある．σ_0 は $\pm\infty$ になることもある．σ_0 を**収束座標**という．また，複素 p 平面上の半平面：$\mathrm{Re}\,p>\sigma_0$ を**収束半平面**という．ここでは $\hat{f}(p)$ は p の正則関数である．しかし，解析接続により，$\hat{f}(p)$ は一般に収束半平面を含むより広い領域で正則である．

$\hat{f}(p)$ に対して $f(x)$ をその **Laplace 逆変換**とよび，

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}\hat{f}(p) \tag{2.2}$$

のように記号 $\mathcal{L}^{-1}$ を使って表わすこともある．具体的には

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{f}(p)e^{xp}dp \tag{2.3}$$

のように，p 平面上の複素積分として表わされる．積分路は虚数軸に平行な直線：Re $p=c\,(c>\sigma_0)$ である（図1）．**反転公式** (2.3) は **Bromwich の積分** とよぶこともある．

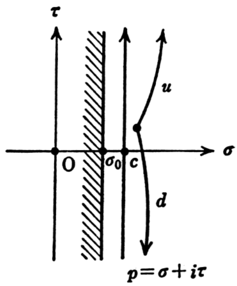


図 1

Laplace 変換に関しては

$$\mathcal{L}f'(x) = p\mathcal{L}f(x) - f(0) \qquad (2.4)$$

などの公式が知られている．ふつう $f(x)$ は $x>0$ に対してのみ指定されている．定義式 (2.1) の積分は $\int_\varepsilon^R$ で $\varepsilon\to+0$, $R\to\infty$ の極限をとると考えればよいから，(2.4) の右辺の $f(0)$ は $f(+0)$，すなわち $\lim_{\varepsilon\to+0} f(\varepsilon)$ と考えるべきである．ところが，実際的に Laplace 変換を応用するばあいに，ふつうの関数の範囲を逸脱して

$$\mathcal{L}\delta(x) = 1 \qquad (2.5)$$

などの公式を使うことがある．$\delta(x)$ の意味を反省してみると，このばあい (2.1) の右辺の無限積分は

$$\int_{-0}^\infty \equiv \lim_{\varepsilon\to-0}\int_\varepsilon^\infty$$

でなければならないだろう．すなわち，$f(x)$ は $x>0$ だけではなく，$x=0$ を含んだ領域で指定されていなければならないことになる．

(2.1) の積分の限界をこのようにきめ，$p=j\zeta$ とおくと

$$\hat{f}(j\zeta) = \int_{-0}^\infty f(x)e^{-j\zeta x}dx \qquad (2.6)$$

となる．ところが，超関数 $f(x)$ の Fourier 変換は定理 5.1 により

$$\mathfrak{F}f(x) = g(\xi) = \text{H.F. } G(\zeta), \qquad (2.7)$$

$$G(\zeta) = \left[\int_{-\infty}^c, \int_\infty^c\right] f(x)e^{-j\zeta x}dx$$

で与えられるから，$f(x)=0\,(x<0)$ とすれば

$$G_+(\zeta) = 0, \quad G_-(\zeta) = -\int_{-0}^\infty f(x)e^{-j\zeta x}dx \qquad (2.8)$$

である．ただし，任意定数 c を -0 ととる．(2.6) と (2.8) を比較すれば

$$G_-(\zeta) = -\hat{f}(j\zeta), \qquad (2.9)$$

$$\hat{f}(p) = -G_-\left(\frac{p}{j}\right) \qquad (2.10)$$

の関係が得られる．すなわち，Laplace 変換というのは，Fourier 変換の母関

数の下成分で与えられることがわかる．$G_+(\zeta)=0$ であるから，$g(\xi)$ はもちろん**下超関数**である．したがって，定義 7.3 により

$$g(\xi)=-[G_-(\xi)]_-=[\hat{f}(j\xi)]_- \tag{2.11}$$

と書くことができる．

(2.10) あるいは (2.11) によれば，$\mathcal{L}f(x)$ を求めることは，けっきょく $f(x)=0\ (x<0)$ を満たす超関数（つまり**右超関数**）の Fourier 変換を求めることにほかならないことがわかる．

以上のことを念頭において超関数に対する Laplace 変換を定義しよう．

〔**定義 1**〕 任意の超関数 $f(x)$ に対して

$$\mathcal{L}f(x)\equiv\hat{f}(p)\overset{\text{def}}{=}\int_{-0}^{\infty}f(x)e^{-px}dx \tag{2.12}$$

を $f(x)$ の **Laplace 変換**という．また $\mathcal{P}_{-0}^{\infty}f(x)$ を $\hat{f}(p)$ の **Laplace 逆変換**といい，記号 $\mathcal{L}^{-1}\hat{f}(p)$ で表わす．

（**合理性**） $f(x)$ がふつうの関数のばあいには (2.12) は確かに Laplace 変換を与える．Laplace 逆変換については，$f(x)$ のかわりに $\mathcal{P}_{-0}^{\infty}f(x)$ を採用したのは，$x<0$ に対して $f(x)$ がどのように指定されていても $\mathcal{P}_{-0}^{\infty}f(x)=0$ であり，かつ $x\geqq 0$ では $\mathcal{P}_{-0}^{\infty}f(x)=f(x)$ となるからである．なお，射影に関する定理 11.20 によれば，一般に

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{P}_a^b f(x)dx \tag{2.13}$$

であるから，(2.12) は

$$\hat{f}(p)=\int_{-\infty}^{\infty}\{\mathcal{P}_{-0}^{\infty}f(x)\}e^{-px}\,dx$$

と書ける．これは $\hat{f}(p)$ に対応するものが $\mathcal{P}_{-0}^{\infty}f(x)$ であることを直接示している．∎

上の定義を採用する際に述べたことはつぎのように定理としてまとめられる．

〔**定理 1**〕 $\mathcal{L}$ を Laplace 変換，$\mathcal{F}$ を Fourier 変換，$\mathcal{P}_a^b$ を区間 (a,b) への射影を表わす演算とすれば，記号的に

$$\mathcal{L}=\mathcal{F}\mathcal{P}_{-0}^{\infty},\quad \mathcal{L}^{-1}=\mathcal{F}^{-1} \tag{2.14}$$

の関係が成り立つ．すなわち，任意の超関数 $f(x)$ に対して $\hat{f}(p)=\mathcal{L}f(x)$ とすれば，

$$[\hat{f}(j\xi)]_-=\mathcal{F}\mathcal{P}_{-0}^{\infty}f(x) \tag{2.15}$$

である．ただし，(2.14) では，変換後の変数 p, ξ に対し $p=j\xi$ とおくものとする．

[定理 2]　超関数 $f(x)$ の Fourier 変換と Laplace 変換の間にはつぎの関係がある．

$$\mathcal{F}f(x)=[\hat{f}_-(-j\xi)]_+ + [\hat{f}(j\xi)]_- - \mathcal{F}\{\mathcal{P}(0)f(x)\}. \tag{2.16}$$

ただし

$$\hat{f}(p)=\mathcal{L}f(x), \qquad \hat{f}_-(p)=\mathcal{L}f(-x). \tag{2.17}$$

また $\mathcal{P}(0)f(x)$ は $f(x)$ に含まれる $x=0$ での一般 δ 関数 $\delta_\infty(x)$ を表わす．

（証明）　定理 11.13 によれば，射影に関して一般に

$$\mathcal{P}_a^b=\mathcal{P}_a^c+\mathcal{P}(c)+\mathcal{P}_c^b \tag{2.18}$$

が成り立つ．いま，記法を簡単にするために

$$\mathcal{P}_a^{c+0}\equiv\mathcal{P}_a^c+\mathcal{P}(c),\quad \mathcal{P}_{c-0}^b\equiv\mathcal{P}(c)+\mathcal{P}_c^b \tag{2.19}$$

と書くことにすれば

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{-\infty}^{\infty}&=\mathcal{P}_{-\infty}^{0}+\mathcal{P}(0)+\mathcal{P}_0^{\infty}\\ &=\mathcal{P}_{-\infty}^{+0}+\mathcal{P}_{-0}^{\infty}-\mathcal{P}(0)\end{aligned} \tag{2.20}$$

である．(実は (2.19) の意味で $\mathcal{P}_{-0}^{\infty}$ の記号はすでに使っている．) したがって

$$\begin{aligned}\mathcal{F}f(x)&=\mathcal{F}\mathcal{P}_{-\infty}^{\infty}f(x)\\ &=\mathcal{F}\mathcal{P}_{-\infty}^{+0}f(x)+\mathcal{F}\mathcal{P}_{-0}^{\infty}f(x)-\mathcal{F}\mathcal{P}(0)f(x).\end{aligned}$$

いま $f_1(x)\equiv\mathcal{P}_{-\infty}^{+0}f(x)$ とおけば，$f_1(-x)=\mathcal{P}_{-0}^{\infty}f(-x)$ である．したがって，上式の右辺の第 1 項は

$$\begin{aligned}\mathcal{F}f_1(x)&=\{\mathcal{F}f_1(-x)\}(-\xi) &&\because\ (5.3.4)\\ &=\{\mathcal{F}\mathcal{P}_{-0}^{\infty}f(-x)\}(-\xi)\\ &=[\hat{f}_-(j\xi)]_-(-\xi) &&\because\ (2.15)\\ &=[\hat{f}_-(-j\xi)]_+ &&\because\ (7.4.1)\end{aligned}$$

のように計算される．第 2 項は，(2.15) により，ただちに

$$\mathcal{F}\mathcal{P}_{-0}^{\infty}f(x)=[\hat{f}(j\xi)]_-$$

となる．これらをまとめれば，けっきょく (2.16) が得られる．∎

[定理 3]　任意の超関数 $f(x)$ に対して

$$\mathcal{L}\mathcal{P}_{-0}^{\infty}f(x)=\mathcal{L}f(x) \tag{2.21}$$

が成り立つ．

（証明）　(2.14) と $\mathcal{P}_{-0}^{\infty}\mathcal{P}_{-0}^{\infty}=\mathcal{P}_{-0}^{\infty}$ の関係（定理 11.15）を使えば

$$\mathcal{L}\mathcal{P}_{-0}^{\infty}=\mathcal{F}\mathcal{P}_{-0}^{\infty}\mathcal{P}_{-0}^{\infty}=\mathcal{F}\mathcal{P}_{-0}^{\infty}=\mathcal{L}$$

として (2.21) が得られる. ▮

この定理は自明のようであるが，たとえば $\mathcal{L}f(x)$ と $\mathcal{L}f'(x)$ の関係を議論するときなどに混乱を生じないために，とくに定理として挙げておいた.

[定理 4]（反転公式） $\mathcal{L}f(x)=\hat{f}(p)$ とすれば

$$\text{H.F.}\frac{1}{j}\left[\int_{u},\int_{d}\right]\hat{f}(p)e^{xp}dp=\begin{cases}f(x), & x\geqq 0\\ 0, & x<0\end{cases} \tag{2.22}$$

である. ただし積分路 u, d は右半平面内にある任意の点から $+i\infty$, $-i\infty$ に走る半無限曲線である（図1）. また $\text{O.F.}f(x)=\{f(x+0)+f(x-0)\}/2$ について

$$\text{P}\int_{-\infty}^{\infty}[\hat{f}(j\xi)]_{-}e^{jx\xi}d\xi=\begin{cases}\text{O.F.}f(x), & x>0\\ \dfrac{1}{2}f(+0), & x=0\\ 0, & x<0\end{cases} \tag{2.23}$$

が成り立つ. ただし，左辺が存在するものとする.

（証明） Fourier 逆変換に関する定理 5.8 と超関数の値に関する定理 13.39 の言いかえである. ▮

以上で明らかなように， Laplace 変換は右超関数の Fourier 変換に過ぎないから，とくに Laplace 変換の理論を展開するまでもなく，すべて Fourier 変換の理論の枠内におさまるはずである. ただ，つぎの点に留意する必要がある. Fourier 変換 $\mathcal{F}f(x)=g(\xi)=\text{H.F.}\,G(\zeta)$ では $f(x), g(\xi)$ はそれぞれ実数 x, ξ の**超関数**，$G(\zeta)$ は**母関数**で複素数 ζ の**解析関数**である. これに反して Laplace 変換では $\hat{f}(p)=\mathcal{L}f(x)$ は複素数 p の**解析関数**である. それゆえ $\hat{f}(p)$ は超関数 $g(\xi)$ に対応するものではなくて，母関数 $G(\zeta)$ の**下成分**に対応するのである. 逆にいえば，$g(\xi)$ は $\hat{f}(p)$ に対応するのではなくて，

$$\text{H.F.}\{\hat{f}(j\zeta)\mathbf{1}_{-}(\zeta)\}=[\hat{f}(j\xi)]_{-}$$

に対応する. ただ，これが下超関数であるため，母関数と同一の関数形 $\hat{f}$ が現われるのである. 要するに，“超関数の Laplace 変換は解析関数である” ことを銘記すべきである.

Laplace 変換に関する種々の公式は Fourier 変換の公式から導くことができる. たとえば Bromwich の積分 (2.3) は上の定理 4 によって与えられる. しかし，(2.4) のような公式を導くには，定理 1 の (2.14) の関係があることに注意

して，**射影演算子** $\mathcal{P}_{-0}^{\infty}$ の役割を正しく考慮する必要がある．

§3. Laplace 変換の諸性質

Laplace 変換の基本的な性質を超関数の立場でいくつか挙げておこう．

[定理 5] $\mathcal{L}f(x)=\hat{f}(p)$ とすれば

$$\mathcal{L}f(ax)=\frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{p}{a}\right),\qquad a>0, \tag{3.1}$$

$$\mathcal{L}f(x+a)=e^{ap}\left\{\hat{f}(p)-\int_{-0}^{a-0}f(x)e^{-px}dx\right\} \tag{3.2}$$

が成り立つ．ただし，a は実数とする．

（証明） 定義1により

$$\begin{aligned}\mathcal{L}f(ax)&=\int_{-0}^{\infty}f(ax)e^{-px}dx\\&=\frac{1}{a}\int_{-0}^{\infty}f(t)e^{-(p/a)t}dt,\qquad t=ax\text{ とおく}\\&=\frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{p}{a}\right).\end{aligned}$$

すなわち (3.1) である．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}f(x+a)&=\int_{-0}^{\infty}f(x+a)e^{-px}dx\\&=e^{ap}\int_{a-0}^{\infty}f(t)e^{-pt}dt,\qquad t=x+a\text{ とおく}\\&=e^{ap}\left\{\int_{-0}^{\infty}-\int_{-0}^{a-0}\right\}f(t)e^{-pt}dt\\&=e^{ap}\left\{\hat{f}(p)-\int_{-0}^{a-0}f(t)e^{-pt}dt\right\}.\end{aligned}$$

これは (3.2) である．∎

[定理 6] $\mathcal{L}f(x)=\hat{f}(p)$ とすれば

$$\mathcal{L}\{x^nf(x)\}=(-1)^n\hat{f}^{(n)}(p) \tag{3.3}$$

である．

（証明） 定理1により

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{x^nf(x)\}&=\mathcal{F}\mathcal{P}_{-0}^{\infty}\{x^nf(x)\}\\&=\mathcal{F}\{x^n\mathcal{P}_{-0}^{\infty}f(x)\}\qquad\because\ \text{定理 11.17}\\&=\left(-\frac{1}{j}\frac{d}{d\xi}\right)^n\mathcal{F}\mathcal{P}_{-0}^{\infty}f(x)\qquad\because\ (5.3.17)\end{aligned}$$

$$= (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} \mathcal{L} f(x). \quad \because \quad p = j\xi$$

すなわち (3.3) が得られた. ▮

[定理 7] つぎの関係が成り立つ.

$$\mathcal{L} f^{(n)}(x) = p^n \mathcal{L} f(x) - \sum_{m=0}^{n-1} f^{(m)}(-0) p^{n-m-1}. \tag{3.4}$$

ただし, $f^{(m)}(-0)$ $(m=1, 2, \cdots, n-1)$ が存在するものとする.

(証明) 定理 1 により

$$\begin{aligned}\mathcal{L} f^{(n)}(x) &= \mathcal{F} \mathcal{P}_{-0}^{\infty} f^{(n)}(x) \\ &= \mathcal{F} \left\{ \frac{d^n}{dx^n} \mathcal{P}_{-0}^{\infty} f(x) - \sum_{m=0}^{n-1} f^{(m)}(-0) \delta^{(n-m-1)}(x) \right\} \quad \because \ (11.7.15) \\ &= p^n \mathcal{F} \mathcal{P}_{-0}^{\infty} f(x) - \sum_{m=0}^{n-1} f^{(m)}(-0) p^{n-m-1} \quad \because \ p = j\xi \\ &= p^n \mathcal{L} f(x) - \sum_{m=0}^{n-1} f^{(m)}(-0) p^{n-m-1}.\end{aligned}$$

すなわち (3.4) である. ▮

例 1 $n=0, 1, 2, \cdots$ に対して

$$\mathcal{L} 1 = \mathcal{L} H(x) = \frac{1}{p}, \tag{3.5}$$

$$\mathcal{L} x^n = n! p^{-(n+1)}, \tag{3.6}$$

$$\mathcal{L} \delta^{(n)}(x) = p^n \tag{3.7}$$

を導け.

まず, (3.4) で $n=1$ とすれば

$$\mathcal{L} f'(x) = p \mathcal{L} f(x) - f(-0). \tag{3.8}$$

$f(x)=1$ に (3.5) を適用すれば, $f'(x)=0$, $f(-0)=1$ であるから, $\mathcal{L}1=1/p$ が得られる.

つぎに, 定理 3 により

$$\mathcal{L} H(x) = \mathcal{L} \mathcal{P}_{-0}^{\infty} 1 = \mathcal{L} 1.$$

したがって, (3.5) が得られる.

つぎに, 定理 6 を使う. $f(x)=1$ として (3.5) の結果を使うと, ただちに (3.6) が得られる.

つぎに, $f(x)=H(x)$ に (3.8) を適用する. $H'(x)=\delta(x)$, $H(-0)=0$ と (3.5) とを考慮すれば

$$\mathcal{L} \delta(x) = 1$$

が得られる. 最後に, $f(x)=\delta(x)$ に定理 7 を適用して, 上の結果を使うと, (3.7) が得られる.

例 2　ベキ型の超関数 $|x|^{\alpha-1}(\log|x|)^n$ の Laplace 変換は付録 J の表で与えられる．この表では $\alpha\neq 0,-1,-2,\cdots$; $m=1,2,\cdots$ とする．表は，たとえばつぎのように読む．

$$\mathcal{L}|x|^{\alpha-1}\log|x|=\Gamma(\alpha)p^{-\alpha}k(p,\alpha),$$

$$\mathcal{L}x^{-m}=\frac{(-p)^{m-1}}{\Gamma(m)}k(p,m).$$

この表はつぎのようにして得られる．まず Fourier 変換の表から

$$\mathcal{F}|x|^{\alpha-1}H(x)=\Gamma(\alpha)[(j\xi)^{-\alpha}]_-.$$

$$\therefore\quad \mathcal{L}|x|^{\alpha-1}=\mathcal{F}\mathcal{P}^{\infty}_{-0}|x|^{\alpha-1}H(x)=\Gamma(\alpha)p^{-\alpha}.$$

これで表の右上の欄が得られた． これから出発して， 定理 4.14 を利用して表の各欄を求める．

§4.　正弦変換，余弦変換

いま，$f(x)$ をふつうの偶関数として，その Fourier 変換を考えよう．

$$\begin{aligned}\mathcal{F}f(x)&=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-j\xi x}dx\\&=\int_{-\infty}^{0}f(x)e^{-j\xi x}dx+\int_{0}^{\infty}f(x)e^{-j\xi x}dx\\&=\int_{0}^{\infty}f(-x)e^{j\xi x}dx+\int_{0}^{\infty}f(x)e^{-j\xi x}dx\\&=2\int_{0}^{\infty}f(x)\cos 2\pi\xi x\,dx.\end{aligned}\tag{4.1}$$

ただし，第 2 行目から第 3 行目に移る際に積分変数を $x\to -x$ のように変えた．また第 4 行目を得るには，偶関数の性質：$f(-x)=f(x)$ を使う．

$f(x)$ が奇関数ならば，同様の計算で

$$\mathcal{F}f(x)=-2i\int_{0}^{\infty}f(x)\sin 2\pi\xi x\,dx\tag{4.2}$$

が得られる．

(4.1), (4.2) の右辺の積分はそれぞれ $f(x)$ の**余弦変換**，**正弦変換**とよばれるものである． これらは，Laplace 変換と同様，$f(x)$ が $x>0$ に対してのみ指定されているときに使われる．これらを表わすために

$$\mathcal{F}_c f(x)\overset{\text{def}}{=}\int_{0}^{\infty}f(x)\cos 2\pi\xi x\,dx,\tag{4.3}$$

$$\mathcal{F}_s f(x)\overset{\text{def}}{=}\int_{0}^{\infty}f(x)\sin 2\pi\xi x\,dx\tag{4.4}$$

のような記号 $\mathcal{F}_c,\mathcal{F}_s$ を用いることにしよう．

さて，$f(x)$ が超関数のばあいはどうであろうか？ $f(x)$ が $x=0$ に特異性を

もつときには，(4.3)，(4.4) の積分の意味が明確ではない．そこで，むしろ(4.1)，(4.2) に立ち帰って，Fourier 変換によって定義することが示唆される．Fourier 変換では $f(x)$ の特異性は問題にならないからである．しかし，$f(x)$ は $x>0$ に対してしか与えられていないから．$\mathfrak{F}f(x)$ を考えるためには $x<0$ での値を指定する必要がある．それには，もちろん，$\mathfrak{F}_c$ に対しては $f(x)$ を**偶超関数**として，また $\mathfrak{F}_s$ に対しては $f(x)$ を**奇超関数**として指定すればよい．しかし，それだけではまだ不十分である．$x=0$ での超関数 $f(x)$ の性質が考慮されていないからである．$x=0$ を含む $(-\infty,\infty)$ の全区間で $f(x)$ を指定し得るためには，$f(x)$ は $[0,\infty)$ で与えられていなければならない．こうして，つぎの定義に導かれる．

〔**定義 2**〕　区間 $[0,\infty)$ で定義された超関数 $f(x)$ に対して，その余弦変換および正弦変換をそれぞれ

$$\mathfrak{F}_c f(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\mathfrak{F} f_e(x), \tag{4.5}$$

$$\mathfrak{F}_s f(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{i}{2}\mathfrak{F} f_o(x) \tag{4.6}$$

で定義する．ただし

$$f_e(x) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{P}_0^\infty f(x)+\mathcal{P}_{-\infty}^{-0} f(-x)+\frac{1}{2}\mathcal{P}(0)\{f(x)+f(-x)\}, \tag{4.7}$$

$$f_o(x) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{P}_0^\infty f(x)-\mathcal{P}_{-\infty}^{-0} f(-x)+\frac{1}{2}\mathcal{P}(0)\{f(x)-f(-x)\} \tag{4.8}$$

はそれぞれ $f(x)$ の $(-\infty,\infty)$ への**偶**および**奇**の**拡大**である．

（**合理性**）　$f(x)$ がもともと全区間 $(-\infty,\infty)$ で定義された偶超関数であれば，$f(-x)=f(x)$ が $(-\infty,\infty)$ で成り立つ．したがって，(4.7) の定義は

$$\begin{aligned} f_e(x) &= \mathcal{P}_0^\infty f(x)+\mathcal{P}_{-\infty}^{-0} f(x)+\mathcal{P}(0)f(x) \\ &= \{\mathcal{P}_{-\infty}^{-0}+\mathcal{P}(0)+\mathcal{P}_0^\infty\}f(x) = f(x) \end{aligned}$$

を与える．また，もし $f(x)$ が $(-\infty,\infty)$ で定義された奇超関数であれば，$f(-x)=-f(x)$ であるから，(4.8) の定義は

$$f_o(x) = \mathcal{P}_0^\infty f(x)+\mathcal{P}_{-\infty}^{-0} f(x)+\mathcal{P}(0)f(x) = f(x)$$

を与える．さらに，$f(x)$ がふつうの関数のばあいには，(4.5)，(4.6) の定義はふつうどおり (4.3)，(4.4) を与える．したがって，上の定義は合理的であるといえる．∎

[定理 8]　$g_e(\xi)=\mathcal{F}_c f(x)$，$g_o(\xi)=\mathcal{F}_s f(x)$ とすれば，$g_e(\xi)$ は偶超関数，$g_o(\xi)$ は奇超関数であって，

$$f_e(x) = 4\mathcal{F}_c g_e(\xi), \tag{4.9}$$

$$f_o(x) = 4\mathcal{F}_s g_o(\xi) \tag{4.10}$$

が成り立つ．ただし，$f_e(x)$, $f_o(x)$ はそれぞれ $f(x)$ の $(-\infty,\infty)$ への偶および奇の拡大である．

（証明）　Fourier 変換に関する定理 5.4，定理 5.5 と定義 2 を使えばよい．∎

半無限区間 $[0,\infty)$ で定義された超関数 $f(x)$ を扱うのに，区間を $(-\infty,\infty)$ に拡張して考えることができるが，それには 3 通りの方法があることがわかった．すなわち

（i）　Laplace 変換　$f(x)=0,\quad x<0$

（ii）　余弦変換　$f(x)=f(-x),\quad f'(0)=0$

（iii）　正弦変換　$f(x)=-f(-x),\quad f(0)=0$

これらはすべて Fourier 変換の枠の中におさまるのである．

$\mathcal{F}f(x)$ が $\mathcal{L}f(x)$ で表わされることから，$\mathcal{F}_c f(x)$，$\mathcal{F}_s f(x)$ が $\mathcal{F}f(x)$ で表わされることはいうまでもない．実際，つぎの定理が成り立つ．

[定理 9]　$\mathcal{L}f(x)=\hat{f}(p)$ とすれば

$$\mathcal{F}_c f(x) = \frac{1}{2}\left\{[\hat{f}(-p)]_+ + [\hat{f}(p)]_- - \frac{1}{2}[\hat{f}_0(p)+\hat{f}_0(-p)]\right\}, \tag{4.11}$$

$$\mathcal{F}_s f(x) = \frac{1}{2i}\left\{[\hat{f}(-p)]_+ - [\hat{f}(p)]_- + \frac{1}{2}[\hat{f}_0(p)-\hat{f}_0(-p)]\right\} \tag{4.12}$$

である．ただし，$\hat{f}_0(p)=\mathcal{L}\{\mathcal{P}(0)f(x)\}$．また $p=j\xi$ とおく．

（証明）　定理 2 を使えばよい．∎

例 3　つぎの結果を導け．

$$\mathcal{F}_c 1 = \frac{1}{2}\delta(\xi), \qquad \mathcal{F}_s 1 = \frac{1}{2\pi\xi};$$

$$\mathcal{F}_c \delta(x) = \frac{1}{2}, \qquad \mathcal{F}_s \delta'(x) = -\pi\xi.$$

ヒント　定義 2 をそのまま使ってもよいし，定理 9 を使ってもよい．

ふつうの関数に対する余弦変換の定義式 (4.3) に機械的に $f(x)=\delta(x)$ を代入すると，積分の下限 $x=0$ の意味に疑義が生ずるだろう．もし $x=+0$ とすれば積分の値は 0，$x=-0$ とすれば積分の値は 1 になる．例 3 の結果 $\mathcal{F}_c\delta(x)=1/2$ は，ちょうどその平均が正しいことを示す．平均をとるということは直観

的にはもっともらしく思われるかも知れないが，数学的に厳密な根拠があるわけではない．その根拠は定義2によってはじめて与えられるのである．

§5. ま と め

超関数論の立場でLaplace変換を考えると，これは右超関数のFourier変換にほかならないことを知った．したがって，Laplace変換の性質はすべてFourier変換の知識から導き出されるのである．このような考え方で，Laplace変換の基本的性質をいくつか導いた．任意の超関数は左超関数と右超関数に分解することができるから，Laplace変換の知識があれば，これをFourier変換に翻訳することができる．たとえば，現在Laplace変換の広汎な表が出版されているが，これに基づいてFourier変換の表を構成することもできるのである．
半無限区間 $[0, \infty]$ を変域とする超関数 $f(x)$ を扱うのに，区間を $(-\infty, \infty)$ に拡張して考えるとつごうのよいことが多い．その際，

（i） $f(x)=0, \qquad x<0;$

（ii） $f(x)=f(-x), \qquad f'(0)=0;$

（iii） $f(x)=-f(-x), \qquad f(0)=0$

の3通りの方法がある．これらはそれぞれ，Laplace変換，余弦変換，正弦変換の活躍する舞台である．そしてこれらがFourier変換として統一的に議論されること，また，超関数論の立場でこれらを定義するとき，$x=0$ での $f(x)$ の性質が重要な意味をもつことを知った．

付　　録

表中の公式で T4.13，D3.12，E15.3 などはそれぞれ 4 章の定理 13，3 章の定義 12，15 章の例 3 を参照すればよいことを示す．すなわち，T, D, E は定理，定義，例の略号である．

付録 A　記　　号

記　号	意　味	参照ページ
▮	証明終り	16
$\stackrel{\text{def}}{=}$	右辺で左辺を定義する	15
$\cong$	母関数の同等性　$F_1(z)\cong F_2(z)$	16
$\cdot$	積　$\varphi(x)\cdot f(x)$，$\psi_1(x)\cdot\psi_2(x)$，$f_1(x)\cdot f_2(x)$	17, 38, 231
$\circ$	形式積　$\psi(x)\circ f(x)$	49
$*$	たたみこみ　$\varphi_1(x)*\varphi_2(x)$，$\varphi(x)*F(z)$，$f_1(x)*F_2(z)$，$f_1(x)*f_2(x)$	253, 257
$**$	F たたみこみ，Fourier 級数としてのたたみこみ　$f_1(x,l)**f_2(x,l)$	306
$*$	$f^*(x)\equiv[f(x)]^*$　$f(x)$ の共役超関数；$f^*(\theta)\equiv[f(\theta)]^*$　$f(\theta)$ の共役 Fourier 級数	309, 316
$\dagger$	$K^\dagger(x)$　たたみこみに関する $K(x)$ の逆数　$K(x)*K^\dagger(x)=\delta(x)$	365
$\overline{}$	$\overline{f(x)}$，$\overline{F}(z)\equiv\overline{F(\bar{z})}$　複素共役	33
$[\ \ ]_\pm$	$[\varphi(x)]_\pm$　$\varphi(z)$ から導かれる上(下)型の超関数	123
j	$=2\pi i$	44
k	$=2\pi\xi$　Fourier 変換で ξ の代りに使うことがある　$ik=j\xi$	366
G.F.	G.F. $f(x)$　$f(x)$ の母関数	13
G.$\tilde{\text{F}}$.	G.$\tilde{\text{F}}$. $f(x)$　$f(x)$ の標準母関数	173
G.$\hat{\text{F}}$.	G.$\hat{\text{F}}$. $f(x)$　$f(x)$ の標準型母関数	328
H.F.	H.F. $F(z)$　$F(z)$ を母関数とする超関数	13
O.F.	O.F. $f(x)$　超関数 $f(x)$ を見直したふつうの関数	15
$\mathcal{F},\mathcal{F}^{-1}$	Fourier 変換，——逆変換	90
$\mathcal{F}_c$	Fourier 余弦変換	395
$\mathcal{F}_s$	Fourier 正弦変換	395
$\mathcal{H},\mathcal{H}^{-1}$	Hilbert 変換，——逆変換	309
$\hat{\mathcal{H}}$	Hilbert 型変換	330
$\mathcal{L},\mathcal{L}^{-1}$	Laplace 変換，——逆変換	388
$\mathcal{P}(a)$	1 点 $x=a$ への射影	220
$\mathcal{P}_a^b\equiv\mathcal{P}(a,b)$	区間 (a,b) への射影	220
O	$f(x)=O\{g(x)\}$　$x\to\alpha$ のとき $\lvert f(x)/g(x)\rvert<A$　A はある適当な正数	142

記号	意味	参照ページ
o	$f(x)=o\{g(x)\}$　$x\to\alpha$ のとき $\lvert f(x)/g(x)\rvert<\varepsilon$ ε は任意の小さい正数	142
$F(z)$	母関数	13
$\tilde{F}(z)$	標準母関数	171
$\hat{F}(z)$	標準型母関数	328
$F_+(z), F_-(z)$	母関数 $F(z)$ の上(下)成分	9, 14
$f(x)$	超関数	9, 13
$f(x)_{\text{H.F.}}$	$f(x)$ を超関数と考える	10
$f(x)_{\text{O.F.}}$	$f(x)$ をふつうの関数と考える	10
$f_0(x)$	$=f(x,l)\cdot H(x;x_0,x_0+l)=\mathcal{P}_{x_0}^{x_0+l}f(x,l)$ 周期超関数 $f(x,l)$ を1周期分だけ考えた超関数	178
$f_e(x)$	$\equiv\mathcal{P}_0^{\infty}f(x)+\mathcal{P}_{-\infty}^{-0}f(-x)+\dfrac{1}{2}\mathcal{P}(0)\{f(x)+f(-x)\}$ $f(x)$ の $(-\infty,\infty)$ への偶の拡大	396
$f_o(x)$	$\equiv\mathcal{P}_0^{\infty}f(x)-\mathcal{P}_{-\infty}^{-0}f(-x)+\dfrac{1}{2}\mathcal{P}(0)\{f(x)-f(-x)\}$ $f(x)$ の $(-\infty,\infty)$ への奇の拡大	396
$\hat{f}(p)$	$=\mathcal{L}f(x)$　$f(x)$ の Laplace 変換	388
$\hat{f}_0(p)$	$=\mathcal{L}\{\mathcal{P}(0)f(x)\}$	397
$f(x,l)$	周期 l の周期超関数	302
$G(\zeta)$	$=\mathcal{F}F(z)$　$F(z)$ の Fourier 変換	92
$g(\xi)$	$=\mathcal{F}f(x)$　$f(x)$ の Fourier 変換	90
$\mathrm{P}\int_a^b$	ふつうの関数の Cauchy の主値積分	40
$\mathrm{pf}\int_a^b$	ふつうの関数の発散積分の有限部分	79
$\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty}$	$=\lim\limits_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}$　超関数の無限主値積分	173
$\mathrm{P}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}$	$=\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=-N}^{N}$　無限主値級数	294
$\int_l, \int_r$	l, r はそれぞれ左，右にのびる積分路	92
$\int_u, \int_d$	u, d はそれぞれ上，下にのびる積分路	392

付録 B 関数，超関数，母関数

記 号	意 味	参照ページ
$1(z)$	$=\left[\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right]=H(z)-H(-z)$ 1の標準母関数	17, 47
$1_+(z)$	$=[1,0]$ 1の母関数	17
$1_-(z)$	$=[0,-1]$ 1の母関数	17
$F(a,b;c;z)$	超幾何関数	379
$\mathrm{erfc}\,z$	$=1-\mathrm{erf}\,z$ 余誤差関数	174
$E_1(z)$	指数積分	404
$\mathrm{E}_1(z)$	指数積分	404
$H(x)$	$=1(x>0),\ 0(x<0)$ Heaviside 関数	21
$H(z)$	$=-j^{-1}\,\mathrm{Log}\,(-z)$ $H(x)$ の母関数	47
$H(x;a,b)$	$=H(x-a)-H(x-b)$	20
$\bar{H}(x;a,b)$	$=1-H(x;a,b)=H(x-b)+H(a-x)$	322
$H(x,l)$	階段関数	188
$H_+(x,l)$, $H_-(x,l)$	右(左)階段関数	188
$H(z,l)$	階段関数の母関数	189
$L(z)$	$=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2}z^n$ Euler の 2 対数関数	327
$\mathrm{Log}\,z$	対数関数 $\log z$ の主値：$-\pi<\arg z\leqq\pi$	21
$\mathrm{sgn}\,x$	$=H(x)-H(-x)$ 符号関数	47
$\mathrm{sgn}\,z$	$=H(z)+H(-z)$ $\mathrm{sgn}\,x$ の母関数	47
$\mathrm{sgn}\,(x;a,b)$	$=H(x-b)-H(a-x)$	322
$\lvert x\rvert^a(\log\lvert x\rvert)^n$, $\lvert x\rvert^a(\log\lvert x\rvert)^n\,\mathrm{sgn}\,x$, $\lvert x\rvert^a(\log\lvert x\rvert)^nH(x)$	ベキ型超関数	48, 68, 70
$B(x,y)$	ベータ関数	240
$\Gamma(z)$	ガンマ関数	84
γ	$=0.57712\cdots$ Euler の定数	84
$\delta(x)$	Dirac のデルタ関数	1, 23
$\delta(z)$	$=-(jz)^{-1}$ $\delta(x)$ の母関数	47
$\delta_\infty(x)$	一般 δ 関数	217
$\delta_\infty{}^e(x)$	偶の一般 δ 関数	218
$\delta_\infty{}^o(x)$	奇の一般 δ 関数	218
$\delta_N(x)$	N 次の一般 δ 関数	218
$\delta(x,l)$	周期 l の δ 関数列	188

記号	意味	参照ページ
$\delta(z,l)$	$\delta(x,l)$ の母関数	189
$\delta_+(x,l)$, $\delta_-(x,l)$	右(左) δ 関数列	187
$\zeta(z)$	$=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{z^n}$　Riemann のゼータ関数	118
$\vartheta_n(v,\tau)$	Jacobi の(楕円)テータ関数	296
$\psi(m)$	$=\begin{cases}-\gamma & (m=1)\\ -\gamma+1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{m-1} & (m=2,3,\cdots)\end{cases}$	84, 118
$\psi(z)$	$=\dfrac{d}{dz}\log\Gamma(z)$　2 ガンマ関数	118

付録 C 特殊関数

指数積分

$$E_1(z)=\int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t}dt,\quad |\arg z|<\pi$$

$$\mathrm{Ei}(z)=-\int_{-z}^\infty \frac{e^{-t}}{t}dt,\quad |\arg z|<\pi$$

$$E_1(z)=-\gamma-\mathrm{Log}\,z-\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n z^n}{n\cdot n!},\quad |\arg z|<\pi$$

$$\mathrm{Ei}(z)=\mathrm{Log}\,z+\gamma+\sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n\cdot n!},\quad |\arg z|<\pi$$

$$E_1(-z)=-\mathrm{Ei}(z)+2\pi i\,1(z),\quad |\arg z|<\pi$$

$$E_1(z)\sim\frac{e^{-z}}{z}\left(1-\frac{1}{z}+\frac{2!}{z^2}-\frac{3!}{z^3}+\cdots\right),\quad |\arg z|<\frac{3}{2}\pi$$

$$E_1(\pm iz)\sim\mp i\frac{e^{\mp iz}}{z}\left(1\pm\frac{i}{z}-\frac{2!}{z^2}\mp i\frac{3!}{z^3}+\cdots\right),\quad |\arg z|<\pi$$

$$[E_1(-x)]_\pm=-[\mathrm{Ei}(x)]_\pm+\pi i$$

$$[E_1(-jax)]_\pm=-[\mathrm{Ei}(jax)]_\pm+\pi i\,\mathrm{sgn}\,x,\quad a>0$$

誤差関数

$$\mathrm{erf}\,z=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}dt$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{n!(2n+1)}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}\sum_{n=0}^\infty \frac{2^n z^{2n+1}}{1\cdot3\cdots(2n+1)}$$

$$\mathrm{erfc}\,z=1-\mathrm{erf}\,z=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^\infty e^{-t^2}dt$$

$$\mathrm{erfc}\,z\sim\frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}z}\left\{1+\sum_{n=1}^\infty(-1)^n\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{(2z^2)^n}\right\},\quad z\to\infty,\ |\arg z|<\frac{3}{4}\pi$$

$$e^{-z^2}\mathrm{erfc}\,(-iz)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-t^2}}{t-z}dt,\quad \mathrm{Im}\,z>0$$

Euler の 2 対数関数

$$L(z)=-\int_0^z \frac{\mathrm{Log}\,(1-t)}{t}dt$$

$$=\sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n^2},\quad |z|<1$$

$$L(z)+L(1-z)=-\mathrm{Log}\,z\,\mathrm{Log}\,(1-z)+L(1)$$

$$L(z)+L(-z)=\frac{1}{2}L(z^2)$$

$$L(z)+L(z^{-1}) = -\frac{1}{2}\{\mathrm{Log}\,(-z)\}^2-L(1)$$

$$L(1) = \frac{\pi^2}{6},\quad L(-1) = -\frac{1}{2}L(1) = -\frac{\pi^2}{12}$$

Γ 関数，2 ガンマ関数

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt,\quad \mathrm{Re}\,z>0$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{2\pi iz}-1}\int_\infty^{(0+)} e^{-t}t^{z-1}dt$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{i}{2\pi}\int_\infty^{(0+)} e^{-t}(-t)^{-z}dt$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

$$\Gamma(2z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}2^{2z-1/2}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$$

$$\mathrm{Log}\,\Gamma(z) \sim \left(z-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Log}\,z-z+\frac{1}{2}\log 2\pi+\frac{1}{12z}-\frac{1}{360z^3}+\cdots,\quad z\to\infty$$

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$$

$$= \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{(1+t)^{z+w}}dt,\quad \mathrm{Re}\,z>0,\ \mathrm{Re}\,w>0$$

$$\mathrm{Log}\,\Gamma(1+z) = -\mathrm{Log}\,(1+z)+(1-\gamma)z+\sum_{n=2}^\infty \frac{(-1)^n}{n}\{\zeta(n)-1\}z^n,\quad |z|<2$$

$$\psi(z) = \frac{d}{dz}\log\Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

$$\psi(z+1) = \psi(z)+\frac{1}{z}$$

$$\psi(1-z) = \psi(z)+\pi\cot \pi z$$

$$\psi(2z) = \frac{1}{2}\psi(z)+\frac{1}{2}\psi\left(z+\frac{1}{2}\right)+\log 2$$

$$\psi(1+z) = -\gamma+\sum_{n=2}^\infty(-1)^n\zeta(n)z^{n-1},\quad |z|<1$$

$$= -\gamma+\sum_{n=1}^\infty \frac{z}{n(n+z)},\quad z\neq -m\quad (m=1,2,\cdots)$$

$$\psi(z) \sim \mathrm{Log}\,z-\frac{1}{2z}-\frac{1}{12z^2}+\frac{1}{120z^4}+\cdots,\quad z\to\infty$$

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^z}$$

$$\Gamma(m) = (m-1)!,\quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\psi(1) = -\gamma,\quad \gamma = 0.57721\cdots$$

$$\psi(m)=-\gamma+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m-1}\quad(m=2,3,\cdots)$$

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right)=-\gamma-2\log 2$$

$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}=1.64493\cdots$$

$$\zeta(3)=1.20205\cdots$$

$$\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}=1.08232\cdots$$

超幾何関数

$$F(a,b;c;z)=1+\frac{a\cdot b}{c}\frac{z}{1!}+\frac{a(a+1)\cdot b(b+1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!}$$

$$(a)_n=a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)\,;\ (a)_0=1$$

$$=\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a+1)}$$

$$F(a,b;c;z)=(1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b;c;z)$$

$$F(a,b;c;z)=F(b,a;c;z)$$

$$=\frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}(-z)^{-a}F\left(a,\,1-c+a;1-b+a;\frac{1}{z}\right)$$

$$+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}(-z)^{-b}F\left(b,1-c+b;1-a+b;\frac{1}{z}\right)$$

$$F(a,b;c;z)$$

$$=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}F(a,b;a+b-c+1;1-z)$$

$$+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}(1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b;c-a-b+1;1-z)$$

$$F(a,\,b;c;z)=(1-z)^{-a}F\left(a,c-b;c;\frac{z}{z-1}\right)$$

$$=(1-z)^{-b}F\left(c-a,b;c;\frac{z}{z-1}\right)$$

$$\frac{d}{dz}\{z^{c-a}(1-z)^{a+b-c}F(a,b;c;z)\}$$

$$=(c-a)z^{c-a-1}(1-z)^{a+b-c-1}F(a-1,b;c;z)$$

$$F(0,b;c;z)=1$$

$$F(a,b;b;z)=(1-z)^{-a}$$

$$F(1,b;c;z)=(c-1)\,z^{1-c}(1-z)^{c-b-1}\int_0^z z^{c-2}(1-z)^{b-c}dz,\quad \mathrm{Re}\,c>1$$

$$F(a,b;c;1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},\ c\neq-n\ (n=0,1,\cdots),\quad \mathrm{Re}\,c>\mathrm{Re}(a+b)$$

付録 D　負整数ベキのベキ型超関数

$$|x|^{-m+\varepsilon}H(x)=x^{-m}e^{\varepsilon\log|x|}H(x)-\frac{\pi}{\sin\pi\varepsilon}\frac{(-1)^m}{\Gamma(m)}\delta^{(m-1)}(x) \qquad \text{T4.14}$$

$$|x|^{-m+\varepsilon}H(-x)=(-1)^m x^{-m}e^{\varepsilon\log|x|}H(-x)+\frac{\pi}{\sin\pi\varepsilon}\frac{1}{\Gamma(m)}\delta^{(m-1)}(x)$$

$$x^{-m}e^{\varepsilon\log|x|}H(x)=|x|^{-m+\varepsilon}H(x)+\frac{\pi}{\sin\pi\varepsilon}\frac{(-1)^m}{\Gamma(m)}\delta^{(m-1)}(x)$$

$$x^{-m}e^{\varepsilon\log|x|}H(-x)=(-1)^m|x|^{-m+\varepsilon}H(-x)-\frac{\pi}{\sin\pi\varepsilon}\frac{(-1)^m}{\Gamma(m)}\delta^{(m-1)}(x)$$

$$x^{-m}e^{\varepsilon\log|x|}=|x|^{-m+\varepsilon}\begin{cases}1, & m=\text{偶}\\ \operatorname{sgn}x, & m=\text{奇}\end{cases}$$

$$x^{-m}e^{\varepsilon\log|x|}\operatorname{sgn}x=|x|^{-m+\varepsilon}\begin{cases}\operatorname{sgn}x\\ 1\end{cases}\pm\frac{2\pi}{\sin\pi\varepsilon}\frac{1}{\Gamma(m)}\delta^{(m-1)}(x), \quad \begin{matrix}m=\text{偶}\\ m=\text{奇}\end{matrix}$$

付録 E 上・下型超関数

$\varphi(z)$ が $0 \leqq \mathrm{Im}\, z \leqq A_\pm$ で正則のとき

$[\varphi(x)]_\pm \equiv \varphi(x \pm i0) = \mathrm{H.F.}\{\varphi(z)1_\pm(z)\}$ 　D7.3

$\varphi(z)$ が $A_- < \mathrm{Im}\, z < A_+$ で正則のとき

$\varphi(x+c) = \mathrm{H.F.}\{\varphi(z+c)1(z)\}, \quad A_- < \mathrm{Im}\, c < A_+$ 　D7.3

$\lim_{a \to \pm 0} \varphi(x+ai) = [\varphi(x)]_\pm = \varphi(x \pm i0)$ 　T7.6

$[\varphi(x)]_\pm(-x) = [\varphi(-x)]_\mp$ 　T7.10

$\overline{[\varphi(x)]_\pm} = [\bar{\varphi}(x)]_\mp, \quad \bar{\varphi}(z) \equiv \overline{\varphi(\bar{z})}$ 　T7.10

$[\varphi_1(x)]_\pm \cdot [\varphi_2(x)]_\pm = [\varphi_1(x)\varphi_2(x)]_\pm$ 　D12.3

$F\{[\varphi(x)]_\pm\} = [F\{\varphi(x)\}]_\pm$ 　D12.4

（$\varphi(z)$, $F\{\varphi(z)\}$ は $0 \leqq \mathrm{Im}\, z \leqq \pm\varepsilon$ で正則）

$[\varphi(x)]_\pm$	$f(x) = [\varphi(x)]_\pm$	
$[\phi(x)]_\pm$	$\phi(x) \pm \frac{1}{2}\mathrm{H.F.}\,\phi(z)$, 　$\phi(z)$: 1 価解析関数	E7.1
$\left[\frac{1}{x}\right]_\pm$	$\frac{1}{x} \mp \pi i \delta(x)$	E7.2
$[\mathrm{Log}\, x]_\pm$	$\log\lvert x\rvert \pm \pi i H(-x)$	E7.2
$[\mathrm{Log}\,(-x)]_\pm$	$\log\lvert x\rvert \mp \pi i H(x)$	E7.2
$[H(x)]_\pm$	$\pm\frac{1}{2}H(x) - \frac{1}{j}\log\lvert x\rvert$	E7.2
$[H(-x)]_\pm$	$\mp\frac{1}{2}H(-x) - \frac{1}{j}\log\lvert x\rvert$	E7.2
$[\delta(x)]_\pm$	$\pm\frac{1}{2}\delta(x) - \frac{1}{jx}$	E7.2
$[x^\alpha]_\pm$	$\lvert x\rvert^\alpha e^{\pm\alpha\pi i H(-x)} = \lvert x\rvert^\alpha H(x) + e^{\pm\alpha\pi i}\lvert x\rvert^\alpha H(-x)$	E7.3
$[(-x)^\alpha]_\pm$	$\lvert x\rvert^\alpha e^{\mp\alpha\pi i H(x)} = e^{\mp\alpha\pi i}\lvert x\rvert^\alpha H(x) + \lvert x\rvert^\alpha H(-x)$	E7.3
$[\{H(x)\}^2]_\pm$	$\frac{1}{4}H(x) \mp \frac{1}{j}\log\lvert x\rvert H(x) + \frac{1}{j^2}(\log\lvert x\rvert)^2$	E12.9
$\left[\frac{1}{x}H(x)\right]_\pm$	$\pm\frac{1}{2x}H(x) - \frac{1}{j}\frac{1}{x}\log\lvert x\rvert - \frac{j}{8}\delta(x)$	E12.9

付録 F　超関数と母関数　　G.$\tilde{\mathrm{F}}$. は標準母関数

$f(x)=\mathrm{H.F.}\,F(z)$	$F(z)=\mathrm{G.F.}\,f(x)$		
$f(x)$	$F(z)$		
$f(-x)$	$-F(-z)$		D3.1
$f(ax+b)$	$\operatorname{sgn} a\, F(az+b)$		D3.8
$\overline{f(x)}$	$-\bar{F}(z)\equiv-\overline{F(\bar{z})}$		D3.3
$f^{(n)}(x)$	$F^{(n)}(z)$		T2.4
1	$\mathbf{1}(z)=\left[\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right]=H(z)-H(-z)$	G.$\tilde{\mathrm{F}}$.	(3.10.6)
	$\mathbf{1}_+(z)=[1,0],\quad \mathbf{1}_-(z)=[0,-1]$		D2.8
$H(x)$	$H(z)=-\frac{1}{j}\operatorname{Log}(-z)$		(3.10.5)
$\operatorname{sgn} x$	$\operatorname{sgn} z=H(z)+H(-z)$		(3.10.7)
$\delta(x)$	$\delta(z)=-\frac{1}{j}\frac{1}{z}$	G.$\tilde{\mathrm{F}}$.	(3.10.13)
$\psi(x)$	$\psi(z)\mathbf{1}(z)$　$\psi(z)$: 1価解析関数		D3.6
$\varphi(x)f(x)$	$\varphi(z)F(z)$　$\varphi(z)$: x軸上で正則		D2.7
$\psi_1(x)\psi_2(x)$	$\psi_1(z)\psi_2(z)\mathbf{1}(z)$　$\psi_1(z),\psi_2(z)$: 1価解析関数		D3.7
$[\varphi(x)]_\pm$	$\varphi(z)\mathbf{1}_\pm(z)$　$\varphi(z)$: $0\lessgtr\operatorname{Im} z\lessgtr A_\pm$ で正則		D7.3
$f(x,l)$	$F(z,l)$　周期超関数	G.$\tilde{\mathrm{F}}$.	T10.5
$\delta(x,l)$	$\delta(z,l)=\frac{i}{2l}\cot\frac{\pi z}{l}\cong\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(z-nl)$		T10.13
$\delta_\pm(x,l)$	$\delta_\pm(z,l)=\mp\frac{1}{jl}\psi\left(1\mp\frac{z}{l}\right)\cong\sum_{n=1}^{\infty}\delta(z\mp nl)$		T10.19
$H(x,l)$	$H(z,l)=-\frac{1}{j}\log\left\{2\sin\frac{\pi(-z)}{l}\right\}$		T10.13
$H_\pm(x,l)$	$H_\pm(z,l)=\frac{1}{j}\log\Gamma\left(1\mp\frac{z}{l}\right)$		T10.19
$(x-c)^{-m}$	$(z-c)^{-m}\mathbf{1}_\mp(z)$, $\operatorname{Im} c\gtrless 0$ $(m=1,2,\cdots)$	G.$\tilde{\mathrm{F}}$.	E10.3
e^{ikx}	$e^{ikz}\mathbf{1}_\pm(z)$,　$k\gtrless 0$	G.$\tilde{\mathrm{F}}$.	E10.4
$e^{ikx}H(x)$	$H(k)e^{ikz}\mathbf{1}_+(z)+\frac{1}{j}e^{ikz}E_1(ikz)$		
$e^{ikx}H(-x)$	$H(-k)e^{ikz}\mathbf{1}_-(z)-\frac{1}{j}e^{ikz}E_1(ikz)$		
$e^{-\alpha x^2}$	$\pm\frac{1}{2}e^{-\alpha z^2}\operatorname{erfc}(\mp i\alpha^{1/2}z)$,　$\operatorname{Im} z\gtrless 0$ $(\operatorname{Re}\alpha\geqq 0)$	G.$\tilde{\mathrm{F}}$.	E10.5

$f(x) = \text{H.F.}\, F(z)$	$F(z) = \text{G.F.}\, f(x)$	
$\lvert x\rvert^{\alpha} H(x)$	$\dfrac{i(-z)^{\alpha}}{2\sin\pi\alpha}$	D3.12
$\lvert x\rvert^{\alpha}$	$\dfrac{z^{\alpha}-(-z)^{\alpha}}{2i\sin\pi\alpha}$	D3.12
$\lvert x\rvert^{\alpha}\operatorname{sgn} x$	$\dfrac{z^{\alpha}+(-z)^{\alpha}}{2i\sin\pi\alpha}$	D3.12
$\lvert x\rvert^{\alpha}(\log\lvert x\rvert)^{n} H(x)$	$\dfrac{\partial^{n}}{\partial\alpha^{n}}\left\{\dfrac{i(-z)^{\alpha}}{2\sin\pi\alpha}\right\}$	D4.4
$\lvert x\rvert^{\alpha}(\log\lvert x\rvert)^{n}$	$\dfrac{\partial^{n}}{\partial\alpha^{n}}\left\{\dfrac{z^{\alpha}-(-z)^{\alpha}}{2i\sin\pi\alpha}\right\}$	D4.4
$\lvert x\rvert^{\alpha}(\log\lvert x\rvert)^{n}\operatorname{sgn} x$	$\dfrac{\partial^{n}}{\partial\alpha^{n}}\left\{\dfrac{z^{\alpha}+(-z)^{\alpha}}{2i\sin\pi\alpha}\right\}$	D4.4
$x^{m}(\log\lvert x\rvert)^{n} H(x)$	$z^{m}\lim_{\varepsilon\to 0}\dfrac{\partial^{n}}{\partial\varepsilon^{n}}P(z,\varepsilon),\quad P(z,\varepsilon)=\dfrac{i\{(-z)^{\varepsilon}-1\}}{2\sin\pi\varepsilon}$	D4.4
$x^{m}e^{\varepsilon\log\lvert x\rvert}H(x)$	$z^{m}P(z,\varepsilon)\quad (m=0,\pm1,\pm2,\cdots)$	T4.13
$\lvert x\rvert^{\alpha}e^{\varepsilon\log\lvert x\rvert}H(x)$	$\dfrac{i(-z)^{\alpha+\varepsilon}}{2\sin\pi(\alpha+\varepsilon)}$	T4.14
$x^{n}H(x)$	$z^{n}H(z)\quad (n=0,1,2,\cdots)$	D2.7
$x^{-m}H(x)$	$z^{-m}H(z)\quad (m=1,2,\cdots)$	(4.7.18)
$x^{-m}\log\lvert x\rvert H(x)$	$-\dfrac{j}{2}z^{-m}\{H(z)\}^{2}$	(4.7.19)
$x^{-m}(\log\lvert x\rvert)^{2}H(x)$	$\dfrac{j^{2}}{3}z^{-m}\left[\{H(z)\}^{3}-\dfrac{1}{4}H(z)\right]$	(4.7.20)
$x^{-m}(\log\lvert x\rvert)^{3}H(x)$	$-\dfrac{j^{3}}{4}z^{-m}\left[\{H(z)\}^{4}-\dfrac{1}{2}\{H(z)\}^{2}\right]$	(4.8.9)
$\lvert x\rvert^{\alpha}(\log\lvert x\rvert)^{n}$	$\text{G.F.}\{\lvert x\rvert^{\alpha}(\log\lvert x\rvert)^{n}H(x)\}$ $+\text{G.F.}\{\lvert x\rvert^{\alpha}(\log\lvert x\rvert)^{n}H(-x)\}$	D4.4
$\lvert x\rvert^{\alpha}(\log\lvert x\rvert)^{n}\operatorname{sgn} x$	$\text{G.F.}\{\lvert x\rvert^{\alpha}(\log\lvert x\rvert)^{n}H(x)\}$ $-\text{G.F.}\{\lvert x\rvert^{\alpha}(\log\lvert x\rvert)^{n}H(-x)\}$	D4.4
$\delta(x,l)$	$\delta(z,l)=\dfrac{i}{2l}\cot\dfrac{\pi z}{l}$ G.$\tilde{\text{F}}$.	E15.1
$\cot\dfrac{\pi x}{l}$	$\cot\dfrac{\pi z}{l}1(z)+\dfrac{i}{2}$ G.$\tilde{\text{F}}$.	E15.1
$H(x;a,b)$	$H(z-a)-H(z-b)=-\dfrac{1}{j}\operatorname{Log}\dfrac{z-a}{z-b}$ G.$\tilde{\text{F}}$.	E15.3
$\bar{H}(x;a,b)$	$H(z-b)-H(z-a)=1(z)+\dfrac{1}{j}\operatorname{Log}\dfrac{z-a}{z-b}$ G.$\tilde{\text{F}}$.	E15.3
$\operatorname{sgn}(x;a,b)$	$H(z-b)+H(a-z)$	E15.3

$f(x)=\text{H.F.}\,F(z)$	$F(z)=\text{G.F.}\,f(x)$		
$\lvert Q(x)\rvert^{-1}H(x;a,b)$	$\frac{i}{2}\{Q(z)\}^{-1},\quad Q(z)=\{(z-a)(z-b)\}^{1/2}$	G.$\tilde{\text{F}}$.	E 15. 5
$\lvert Q(x)\rvert H(x;a,b)$	$-\frac{i}{2}\left\{Q(z)-z+\frac{1}{2}(a+b)\right\}$	G.$\tilde{\text{F}}$.	E 15. 5
$x^{-1}\lvert Q(x)\rvert^{-1}H(x;a,b)$	$z^{-1}\{Q(z)\}^{-1}$	G.$\tilde{\text{F}}$.	E 15. 7
$x^{-1}\lvert Q(x)\rvert H(x;a,b)$	$z^{-1}Q(z)-1$	G.$\tilde{\text{F}}$.	E 15. 7
$\sin^{-1}x\,H(x;-1,1)$	$\text{Log}\,\frac{z+\sqrt{z^2-1}}{2z}$	G.$\tilde{\text{F}}$.	E 15. 8
$\text{sgn}(x-c)H(x;a,b)$	$H(z;c,b)-H(z;a,c),\quad a<c<b$	G.$\tilde{\text{F}}$.	E 15. 8
$\frac{\log\lvert x\rvert}{\sqrt{1-x^2}}H(x;-1,1)$	$(z^2-1)^{-1/2}\,\text{Log}\,\frac{z+\sqrt{z^2-1}}{2z}$	G.$\tilde{\text{F}}$.	E 15. 9
$\sqrt{1-x^2}\log\lvert x\rvert H(x;-1,1)$	$(z^2-1)^{1/2}\,\text{Log}\,\frac{z+\sqrt{z^2-1}}{2z}$	G.$\tilde{\text{F}}$.	E 15. 9
$\lvert S(x)\rvert H(x;a,b)$	$\frac{i}{2}(-1)^q\{S(z)-[S(z)]_P\}$ $S(z)=(z-a)^{-(p+1/2)}(z-b)^{-(q+1/2)}\quad(p,q=$整数$)$ $[S(z)]_P$: $S(z)$ を z^{-1} の昇べキに展開したときの z の多項式の部分	G.$\tilde{\text{F}}$.	E 15. 10
$x^{-m}H(x-a)$	$z^{-m}\left[H(z-a)+\frac{1}{j}\left\{\log\lvert a\rvert-\sum_{n=1}^{m-1}\frac{1}{n}\left(\frac{z}{a}\right)^n\right\}\right]$ $(m=1,2,\cdots)$	G.$\tilde{\text{F}}$.	E 15. 11
$\log\lvert x\rvert H(x-a)$	$-\frac{1}{j}\left\{L\left(\frac{a}{z}\right)+\log\lvert a\rvert\,\text{Log}\left(1-\frac{a}{z}\right)\right\}-\frac{j}{2}\{H(z)\}^2$ $=\frac{1}{j}\left\{L\left(\frac{z}{a}\right)-\log\lvert a\rvert\,\text{Log}\left(1-\frac{z}{a}\right)-\frac{1}{2}(\log\lvert a\rvert)^2+L(1)\right\}$ $-\frac{j}{2}\{H(z)\}^2+\frac{j}{2}\{H(\pm z)\}^2,\quad a\gtrless 0$		
$\log\lvert x\rvert H(x;0,a)$	$\frac{1}{j}\left\{L\left(\frac{a}{z}\right)+\log\lvert a\rvert\,\text{Log}\left(1-\frac{a}{z}\right)\right\}$ $=-\frac{1}{j}\left\{L\left(\frac{z}{a}\right)-\log\lvert a\rvert\,\text{Log}\left(1-\frac{z}{a}\right)-\frac{1}{2}(\log\lvert a\rvert)^2+L(1)\right\}$ $-\frac{j}{2}\{H(\pm z)\}^2,\quad a\gtrless 0$	G.$\tilde{\text{F}}$.	

$f(x)=\text{H.F.}\,F(z)$	$F(z)=\text{G.F.}\,f(x)$
$\log\lvert x\rvert H(x;a,b)$	$\frac{1}{j}\left\{L\left(\frac{a}{z}\right)+\log\lvert a\rvert\operatorname{Log}\left(1-\frac{a}{z}\right)-L\left(\frac{b}{z}\right)-\log\lvert b\rvert\operatorname{Log}\left(1-\frac{b}{z}\right)\right\}$ G.$\tilde{\text{F}}$. $=-\frac{1}{j}\left\{L\left(\frac{z}{a}\right)-\log\lvert a\rvert\operatorname{Log}\left(1-\frac{z}{a}\right)-L\left(\frac{z}{b}\right)+\log\lvert b\rvert\operatorname{Log}\left(1-\frac{z}{b}\right)-\frac{1}{2}(\log\lvert a\rvert)^2+\frac{1}{2}(\log\lvert b\rvert)^2\right\}+\frac{j}{2}\{H(z)\}^2-\frac{j}{2}+\frac{j}{2}[\{H(\operatorname{sgn} b\, z)\}^2-\{H(\operatorname{sgn} a\, z)\}^2]$
$x^\alpha(1-x)^\beta H(x;0,1)$	$-\frac{1}{j}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}\frac{1}{z}F\left(1,\alpha+1;\alpha+\beta+2;\frac{1}{z}\right)$ G.$\tilde{\text{F}}$. $=\frac{i(-z)^\alpha(1-z)^\beta}{2\sin\pi\alpha}+\frac{1}{j}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}F(1,-\alpha-\beta;1-\alpha;z)$
$x^\alpha(x-1)^\beta H(x-1)$	$\frac{1}{j}\frac{\Gamma(-\alpha-\beta)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(1-\alpha)}F(1,-\alpha-\beta;1-\alpha;z)$ $=\frac{i}{2\sin\pi(\alpha+\beta)}(-z)^\alpha(1-z)^\beta-\frac{1}{j}\frac{\Gamma(-\alpha-\beta-1)}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{1}{z}F\left(1,\alpha+1;\alpha+\beta+2;\frac{1}{z}\right)$
$\lvert x\rvert^\alpha(1-x)^\beta H(-x)$	$\frac{z^\alpha(1-z)^\beta}{2i\sin\pi\alpha}-\frac{1}{j}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(-\alpha-\beta)}{\Gamma(-\beta)}F(1,-\alpha-\beta;1-\alpha;z)$ $=\frac{z^\alpha(z-1)^\beta}{2i\sin\pi(\alpha+\beta)}+\frac{1}{2i\sin\pi\alpha}\frac{\Gamma(-\alpha-\beta-1)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)}\frac{1}{z}\times F\left(1,\alpha+1;\alpha+\beta+2;\frac{1}{z}\right)$

付録 G　たたみこみ

$f_1(x)*f_2(x)$	$k(x)=f_1(x)*f_2(x)$	

定義　D13.1

$\varphi(x),\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ はふつうの関数，$f(x),f_1(x),f_2(x)$ は超関数，$F(z),F_1(z),F_2(z)$ は母関数．

$\varphi_1(x)*\varphi_2(x)$	$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(t)\varphi_2(x-t)dt$	
$\varphi(x)*F(z)$	$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)F(z-t)dt$	
$f_1(x)*F_2(z)$	$\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)F_2(z-t)dt$	
$\varphi(x)*f(x)$	H.F. $\{\varphi(x)*F(z)\}$	
$f_1(x)*f_2(x)$	H.F. $\{f_1(x)*F_2(z)\}$	

超関数のたたみこみとふつうの関数のたたみこみの関係

$f_1(x)*f_2(x)$	$\{\text{O.F.}\,f_1(x)\}*f_2(x)=\{\text{O.F.}\,f_2(x)\}*f_1(x)$	T13.2
O.F. $\{\varphi(x)*f(x)\}$	$\varphi(x)*\{\text{O.F.}\,f(x)\}$	T13.2
O.F. $\{f_1(x)*f_2(x)\}$	$\{\text{O.F.}\,f_1(x)\}*\{\text{O.F.}\,f_2(x)\}$	T13.2
O.F. $\{\varphi(x)*f(x)\}$	$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)f(x-t)dt$	T13.3
O.F. $\{f_1(x)*f_2(x)\}$	$\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)\cdot f_2(x-t)dt\quad(x\fallingdotseq\sigma,\tau)$ $x=\sigma,\ x=\tau$ はそれぞれ $f_1(x),\ f_2(x)$ の特異点	T13.4

$f_1(x)*f_2(x)$	$f_2(x)*f_1(x)$	T13.1
$\{c_1f_1(x)+c_2f(x)\}*f(x)$	$c_1f_1(x)*f(x)+c_2f_2(x)*f(x)$ $c_1,c_2=$ 複素数	T13.10
$\{f_1(x)*f_2(x)\}*f_3(x)$	$f_1(x)*\{f_2(x)*f_3(x)\}$	T13.12
$\frac{d}{dx}\{f_1(x)*f_2(x)\}$	$f_1(x)*f_2'(x)=f_1'(x)*f_2(x)$	T13.14
$x\{f_1(x)*f_2(x)\}$	$\{xf_1(x)\}*f_2(x)+f_1(x)*\{xf_2(x)\}$	T13.15
$f_1(ax+b)*f_2(ax+c)$	$\frac{1}{\|a\|}k(ax+b+c),\quad a,b,c=$ 実数	T13.16
$\overline{f_1(x)*f_2(x)}$	$\overline{f_1(x)}*\overline{f_2(x)}$	T13.17
$f(x)*\varphi(z)$	$\phi(z)$	T13.25
$f(x)*[\varphi(x)]_{\pm}$	$[\phi(x)]_{\pm}$	T13.31

$f_1(x)*f_2(x)$	$k(x)=f_1(x)*f_2(x)$	
$f(x)*\varphi(x+c)$	$\psi(x+c),\quad 0\lesseqgtr \mathrm{Im}\, c\lesseqgtr 0$	T13. 31
	$\varphi(z)$ が $0\lesseqgtr \mathrm{Im}\, z\lesseqgtr A_\pm$ で正則ならば $\psi(z)$ も $0\lesseqgtr \mathrm{Im}\, z\lesseqgtr A_\pm$ で正則	
$f(x)*\delta(z)$	$\tilde{F}(z)$	T13. 7
$f(x)*[\delta(x)]_\pm$	$[\tilde{F}(x)]_\pm$	T13. 7
$\mathfrak{F}f_1(x)*\mathfrak{F}f_2(x)$	$\mathfrak{F}\{f_1(x)\cdot f_2(x)\}$	T13. 33
$\mathcal{H}f_1(x)*\mathcal{H}f_2(x)$	$-f_1(x)*f_2(x)$	
$f(x)*\delta^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(x)$	E13. 4
$f'(x)*H(x)$	$f(x)$	T13. 24
$f(x)*\{\underbrace{H(x)*H(x)*\cdots*H(x)}_{n\text{個}}\}$	$\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x}f(x)(dx)^n$, $f(x)$：右超関数	T13. 24
$f(x)*1$	$g(0)\equiv \mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx,\quad g(\xi)=\mathfrak{F}f(x)$	E14. 1
$f(x)*e^{jkx}$	$g(k)e^{jkx},\quad g(k)=\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-jkx}dx$	T14. 3
$f(x)*\delta(x,l)$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(x-nl)$	T14. 7
$f_0(x)*\delta(x,l)$	$f(x,l),\quad f_0(x)=f(x)\cdot H(x;x_0,x_0+l)$	T14. 9
$f(x)*f(x,l)$	$l\{f(x)*\delta(x,l)\}**f(x,l)$	T14. 13
$f(x)*\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_ne^{nj\pi x/l}$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_ng\left(\frac{n}{l}\right)e^{nj\pi x/l},\quad g(\xi)=\mathfrak{F}f(x)$	T14. 10
$\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_ne^{nj\pi x/l}**\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_ne^{nj\pi x/l}$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nb_ne^{nj\pi x/l}$	T14. 12
$f(x)*\frac{1}{x}$	$-\pi\mathcal{H}f(x)$	D15. 1
$\frac{1}{x}*\frac{1}{x}$	$-\pi^2\delta(x)$	E13. 3
$\frac{1}{x}*\left[\frac{1}{x}\right]_\pm$	$\mp\frac{j}{2}\left[\frac{1}{x}\right]_\pm$	E13. 6
$\left[\frac{1}{x}\right]_\pm*\left[\frac{1}{x}\right]_\pm$	$\mp j\left[\frac{1}{x}\right]_\pm$	E13. 6
$\left[\frac{1}{x}\right]_\pm*\left[\frac{1}{x}\right]_\mp$	0	E13. 6
$\frac{1}{x+a_1}*\frac{1}{x+a_2}$	$-\pi^2\delta(x+a_1+a_2),\quad a_1,a_2=$ 実数	E13. 7
$\frac{1}{x}*\frac{1}{x+ib}$	$\mp\frac{j}{2}\frac{1}{x+ib},\quad b\gtrless 0$	E13. 7

$f_1(x)*f_2(x)$	$k(x)=f_1(x)*f_2(x)$	
$\dfrac{1}{x+ib_1}*\dfrac{1}{x+ib_2}$	$\begin{cases}\mp\dfrac{1}{j}\dfrac{1}{x+i(b_1+b_2)}, & b_1b_2>0,\ b_1\gtrless 0\\ 0, & b_1b_2<0\end{cases}$	E 13.7
$\dfrac{1}{x^m}*\dfrac{1}{x^n}$	$\dfrac{(-1)^{m+n-1}\pi^2}{(m-1)!(n-1)!}\delta^{(m+n-2)}(x)$	
$[x^\alpha]_\pm*[x^\beta]_\pm$	$\mp j\dfrac{\Gamma(-\alpha-\beta-1)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)}[x^{\alpha+\beta+1}]_\pm,\quad \mathrm{Re}(\alpha+\beta)<-1$	
$[x^\alpha]_\pm*[x^\beta]_\mp$	$0,\quad \mathrm{Re}(\alpha+\beta)<-1$	
$\lvert x\rvert^\alpha H(x)*\lvert x\rvert^\beta H(x)$	$\dfrac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}\lvert x\rvert^{\alpha+\beta+1}H(x)$	
$\lvert x\rvert^\alpha H(x)*\lvert x\rvert^{-\alpha-m-1}H(x)$	$\dfrac{(-1)^{m-1}\pi}{\sin\pi\alpha}\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+m+1)}\delta^{(m-1)}(x)$	
$\lvert x\rvert^\alpha H(x)*x^{-m}H(x)$	$\dfrac{(-1)^{m-1}\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(m)\Gamma(\alpha-m+2)}\{\log\lvert x\rvert+\psi(m)-\psi(\alpha-m+2)\}\lvert x\rvert^{\alpha-m+1}H(x)$	
$x^nH(x)*x^{-m}H(x)$	$(-1)^{n+1}\dfrac{\Gamma(n+1)\Gamma(m-n-1)}{\Gamma(m)}x^{n-m+1}H(x)+(-1)^{m-1}\dfrac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(m)}\{\psi(m)-\psi(m-n-1)\}\delta^{(m-n-2)}(x),\quad m>n+1$	
$x^{-m}H(x)*x^{-n}H(x)$	$\dfrac{\Gamma(m+n-1)}{\Gamma(m)\Gamma(n)}\{2\log\lvert x\rvert+\psi(m)+\psi(n)-2\psi(m+n+1)\}\times\dfrac{H(x)}{x^{m+n-1}}+\dfrac{(-1)^{m+n}}{\Gamma(m)\Gamma(n)}[\{\psi(m+n-1)-\psi(m)\}\times\{\psi(m+n-1)-\psi(n)\}+\psi'(m+n-1)]\delta^{(m+n-2)}(x)$	
$\lvert x\rvert^\alpha H(x)*\lvert x\rvert^\beta H(-x)$	$-\pi\dfrac{\Gamma(-\alpha-\beta-1)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)}\left\{\dfrac{1}{\sin\pi\beta}H(x)+\dfrac{1}{\sin\pi\alpha}H(-x)\right\}\lvert x\rvert^{\alpha+\beta+1},\quad \mathrm{Re}(\alpha+\beta)<-1$	
$\lvert x\rvert^\alpha H(x)*\lvert x\rvert^{-\alpha-m-1}H(-x)$	$\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+m+1)}\left\{(-1)^m\Gamma(m)\dfrac{1}{x^m}-\pi\cot\pi\alpha\,\delta^{(m-1)}(x)\right\},\quad m=1,2,\cdots$	
$\lvert x\rvert^\alpha H(x)*x^nH(-x)$	$-\dfrac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(\alpha+n+2)}\lvert x\rvert^{\alpha+n+1}H(x),\quad \mathrm{Re}(\alpha+n)<-1$	
$\lvert x\rvert^\alpha H(x)*x^{-m}H(-x)$	$-\dfrac{\Gamma(m-\alpha-1)}{\Gamma(m)\Gamma(-\alpha)}\left[\{\log\lvert x\rvert+\psi(m)-\psi(m-\alpha-1)\}H(x)+\dfrac{(-1)^m\pi}{\sin\pi\alpha}H(-x)\right]\lvert x\rvert^{\alpha-m+1},\quad \mathrm{Re}(\alpha-m)<-1$	

$f_1(x)*f_2(x)$	$k(x)=f_1(x)*f_2(x)$
$x^nH(x)*x^{-m}H(-x)$	$(-1)^{n+1}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m-n-1)}{\Gamma(m)}x^{n-m+1}H(-x)$ $+(-1)^m\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(m)}\{\psi(m)-\psi(m-n-1)\}\delta^{(m-n-2)}(x),$ $m-n>1$
$x^{-m}H(x)*x^{-n}H(-x)$	$-\frac{\Gamma(m+n-1)}{\Gamma(m)\Gamma(n)}\Big[\log\|x\|\operatorname{sgn}x-\{\psi(m+n-1)-\psi(n)\}H(x)$ $+\{\psi(m+n-1)-\psi(m)\}H(-x)\Big]\frac{1}{x^{m+n-1}}$ $-\frac{(-1)^{m+n}}{\Gamma(m)\Gamma(n)}\Big[\{\psi(m+n-1)-\psi(m)\}\{\psi(m+n-1)-\psi(n)\}$ $+\psi'(m+n-1)+\frac{\pi^2}{2}\Big]\delta^{(m+n-2)}(x),\quad m+n>1$
$\|x\|^\alpha*\|x\|^\beta$	$-\frac{2\sin\frac{\pi}{2}\alpha\sin\frac{\pi}{2}\beta}{\cos\frac{\pi}{2}(\alpha+\beta)}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}\|x\|^{\alpha+\beta+1},$ $\mathrm{Re}(\alpha+\beta)>-1$
$\|x\|^\alpha*\|x\|^\beta\operatorname{sgn}x$	$\frac{2\sin\frac{\pi}{2}\alpha\cos\frac{\pi}{2}\beta}{\sin\frac{\pi}{2}(\alpha+\beta)}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}\|x\|^{\alpha+\beta+1}\operatorname{sgn}x,$ $\mathrm{Re}(\alpha+\beta)<-1$
$\|x\|^\alpha\operatorname{sgn}x*\|x\|^\beta\operatorname{sgn}x$	$\frac{2\cos\frac{\pi}{2}\alpha\cos\frac{\pi}{2}\beta}{\cos\frac{\pi}{2}(\alpha+\beta)}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}\|x\|^{\alpha+\beta+1},$ $\mathrm{Re}(\alpha+\beta)<-1$
$x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}H(x;0,1)$ $*\|x\|^\gamma H(x)$	$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)}x^{\alpha+\gamma}(1-x)^{\beta+\gamma}$ $\times F(\gamma+1,\alpha+\beta+\gamma;\alpha+\gamma+1;x)H(x;0,1)$ $+\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}F\left(-\gamma,\alpha;\alpha+\beta;\frac{1}{x}\right)\|x\|^\gamma H(x-1)$
$x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}H(x;0,1)$ $*\|x\|^\gamma H(-x)$	$\frac{\Gamma(\alpha+\gamma)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}F(-\gamma,1-\alpha-\beta-\gamma;1-\alpha-\gamma;x)$ $\times H(x;-1,1)$ $+\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)}\|x\|^{\alpha+\gamma}(1-x)^{\beta+\gamma}$ $\times F(\gamma+1,\alpha+\beta+\gamma;\alpha+\gamma+1;x)$ $\times\left\{-\frac{\sin\pi\alpha}{\sin\pi(\alpha+\gamma)}H(x;0,1)+\frac{\sin\pi\gamma}{\sin\pi(\alpha+\gamma)}H(x;-1,0)\right\}$ $+\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}F\left(-\gamma,\alpha;\alpha+\beta;\frac{1}{x}\right)\|x\|^\gamma H(-x-1)$

$f_1(x)*f_2(x)$	$k(x)=f_1(x)*f_2(x)$
$x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}H(x;0,1)$ $*\lvert x\rvert^{\gamma}$	$\dfrac{\Gamma(\alpha+\gamma)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}F(-\gamma,1-\alpha-\beta-\gamma;1-\alpha-\gamma;x)\times H(x;-1,1)+\dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}F\left(-\gamma,\alpha;\alpha+\beta;\dfrac{1}{x}\right)\lvert x\rvert^{\gamma}\overline{H}(x;-1,1)+\dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)}\lvert x\rvert^{\alpha+\gamma}(1-x)^{\beta+\gamma}\times F(\gamma+1,\alpha+\beta+\gamma;\alpha+\gamma+1;x)\times\left[\left\{1-\dfrac{\sin\pi\alpha}{\sin\pi(\alpha+\gamma)}\right\}H(x;0,1)+\dfrac{\sin\pi\gamma}{\sin\pi(\alpha+\gamma)}H(x;-1,0)\right]$
$x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}H(x;0,1)$ $*\lvert x\rvert^{\gamma}\operatorname{sgn}x$	$-\dfrac{\Gamma(\alpha+\gamma)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}F(-\gamma,1-\alpha-\beta-\gamma;1-\alpha-\gamma;x)\times H(x;-1,1)+\dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}F\left(-\gamma,\alpha;\alpha+\beta;\dfrac{1}{x}\right)\lvert x\rvert^{\gamma}\operatorname{sgn}(x;-1,1)+\dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)}\lvert x\rvert^{\alpha+\gamma}(1-x)^{\beta+\gamma}\times F(\gamma+1,\alpha+\beta+\gamma;\alpha+\gamma+1;x)\times\left[\left\{1+\dfrac{\sin\pi\alpha}{\sin\pi(\alpha+\gamma)}\right\}H(x;0,1)-\dfrac{\sin\pi\gamma}{\sin\pi(\alpha+\gamma)}H(x;-1,0)\right]$
$x^{\alpha-1}(x-1)^{\beta-1}H(x-1)$ $*\lvert x\rvert^{\gamma}H(x)$	$\dfrac{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)}\lvert x\rvert^{\gamma}F\left(-\gamma,\alpha;\alpha+\beta;\dfrac{1}{x}\right)H(x-1)-\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta-1)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\lvert x\rvert^{\alpha+\beta+\gamma-1}\times F\left(1-\alpha-\beta-\gamma,1-\beta;2-\alpha-\beta;\dfrac{1}{x}\right)H(x-1)$

$f_1(x) * f_2(x)$	$k(x) = f_1(x) * f_2(x)$
$x^{\alpha-1}(x-1)^{\beta-1}H(x-1)$ $*\|x\|^{\gamma}H(-x)$	$\frac{\Gamma(1-\alpha-\beta-\gamma)\Gamma(\beta)}{\Gamma(1-\alpha-\gamma)}F(-\gamma, 1-\alpha-\beta-\gamma; 1-\alpha-\gamma; x)$ $\times H(x; -1, 1)$ $+\frac{\Gamma(1-\alpha-\beta-\gamma)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(2-\alpha-\beta)}\|x\|^{\alpha+\beta+\gamma-1}$ $\times F\left(1-\alpha-\beta-\gamma, 1-\beta; 2-\alpha-\beta; \frac{1}{x}\right)H(x-1)$ $+\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)}\|x\|^{\gamma}F\left(-\gamma, \alpha; \alpha+\beta; \frac{1}{x}\right)H(-x-1)$ $+\frac{\Gamma(\alpha+\beta-1)\Gamma(1-\alpha-\beta-\gamma)}{\Gamma(-\gamma)}\|x\|^{\alpha+\beta+\gamma-1}$ $\times F\left(1-\alpha-\beta-\gamma, 1-\beta; 2-\alpha-\beta; \frac{1}{x}\right)H(-x-1)$, $\mathrm{Re}(\alpha+\beta+\gamma)<1$

付録 H　Hilbert 変換

$f(x)$	$h(x)=\mathscr{H}f(x)$	
$f(x)$	$f(x)*\dfrac{-1}{\pi x}$,　O.F. $\mathscr{H}f(x)=\dfrac{1}{\pi}\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{f(t)}{t-x}dt$	D15.1 T15.1
$f(x)$	$2i$ H.F. $\{\tilde{F}(z)1(z)\}$	T15.2
$=[\tilde{F}(x)]_+-[\tilde{F}(x)]_-$	$=i\{[\tilde{F}(x)]_++[\tilde{F}(x)]_-\}$	T15.16
$f(x)$	$2i\{\mathrm{Re}[\tilde{F}_r(x)]_\pm+i\mathrm{Re}[\tilde{F}_i(x)]_\pm\}$	
	$\tilde{F}(z)=\tilde{F}_r(z)+i\tilde{F}_i(z)$	T15.19
$f_\pm(x)$	$\pm if_\pm(x)$	T15.7
$\mathrm{Re}\,f_\pm(x)$	$\mp\mathrm{Im}\,f_\pm(x)$	T15.7
$\mathrm{Im}\,f_\pm(x)$	$\pm\mathrm{Re}\,f_\pm(x)$	T15.7
$\overline{f(x)}$	$\overline{h(x)}$	T13.17
$f'(x)$	$h'(x)$	T15.13
$f(ax+b)$	$\mathrm{sgn}\,a\,h(ax+b)$,　$a,b=$ 実数	T15.13
$\mathscr{H}f(x)$	$-f(x)$,　G.$\tilde{\mathrm{F}}$. $f(\pm i\infty)=0$	T15.4
$(x-a)^nf(x)$	$(x-a)^nh(x)+\sum_{p=1}^{n}c_p(x-a)^{n-p}$,　$a=$ 実数	T15.14
	$c_p=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)(x-a)^{p-1}dx$	
$f_1(x)*f_2(x)$	$f_1(x)*\mathscr{H}f_2(x)=\mathscr{H}f_1(x)*f_2(x)$	T15.10
1	0	T15.8
e^{ikx}	$\pm ie^{ikx}$,　$k\gtrless 0$	T15.8
$\sin kx$	$\cos kx$,　$k>0$	T15.8
$\cos kx$	$-\sin kx$,　$k>0$	T15.8
$\delta(x)$	$-\dfrac{1}{\pi x}$	T15.8
$\dfrac{1}{x}$	$\pi\delta(x)$	T15.8
$\delta(x,l)$	$-\dfrac{1}{l}\cot\dfrac{\pi x}{l}$	T15.8
$\cot\dfrac{\pi x}{l}$	$l\,\delta(x,l)-1$	T15.8
$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{nj\pi x/l}$	$i\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{sgn}\,n\,c_ne^{nj\pi x/l}$	T15.11

$f(x)$	$h(x)=\mathcal{H}f(x)$	
$\delta^{(n)}(x)$	$(-1)^{n+1}\dfrac{\Gamma(n+1)}{\pi}\dfrac{1}{x^{n+1}}$	E 15.2
$\lvert x\rvert^{\alpha}H(\pm x)$	$\mp\operatorname{cosec}\pi\alpha\{\cos\pi\alpha\,H(\pm x)+H(\mp x)\}\lvert x\rvert^{\alpha},\quad \operatorname{Re}\alpha<0$	E 15.2
$\lvert x\rvert^{\alpha}$	$\tan\dfrac{\pi}{2}\alpha\lvert x\rvert^{\alpha}\operatorname{sgn}x,\quad \operatorname{Re}\alpha<1$	E 15.2
$\lvert x\rvert^{\alpha}\operatorname{sgn}x$	$-\cot\dfrac{\pi}{2}\alpha\lvert x\rvert^{\alpha},\quad \operatorname{Re}\alpha<0$	E 15.2
$\dfrac{1}{x^m}H(\pm x)$	$\mp\dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{x^m}\log\lvert x\rvert-\dfrac{\pi}{2}\dfrac{(-1)^m}{\Gamma(m)}\delta^{(m-1)}(x)$	E 15.2
$\dfrac{1}{x^m}$	$-\pi\dfrac{(-1)^m}{\Gamma(m)}\delta^{(m-1)}(x)$	E 15.2
$\dfrac{1}{x^m}\operatorname{sgn}x$	$-\dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{x^m}\log\lvert x\rvert$	E 15.2
$\dfrac{1}{x^m}\log\lvert x\rvert$	$\dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{x^m}\operatorname{sgn}x$	E 15.2
$\dfrac{1}{x^m}\log\lvert x\rvert\operatorname{sgn}x$	$-\dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{x^m}(\log\lvert x\rvert)^2+\dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{x^m}$	E 15.2
$H(x;a,b)$	$-\dfrac{1}{\pi}\log\left\lvert\dfrac{x-a}{x-b}\right\rvert$	E 15.4
$x^nH(x;a,b)$	$-\dfrac{1}{\pi}\left\{x^n\log\left\lvert\dfrac{x-a}{x-b}\right\rvert-\sum_{p=1}^{n}\dfrac{1}{p}(b^p-a^p)x^{n-p}\right\}$	E 15.4
$\lvert Q(x)\rvert^{-1}H(x;a,b)$	$-\lvert Q(x)\rvert^{-1}\operatorname{sgn}(x;a,b),\quad Q(z)=\{(z-a)(z-b)\}^{1/2}$	E 15.5
$\lvert Q(x)\rvert H(x;a,b)$	$\lvert Q(x)\rvert\operatorname{sgn}(x;a,b)-x+\dfrac{1}{2}(a+b)$	E 15.5
$\dfrac{(x-a)^n}{\lvert Q(x)\rvert}H(x;a,b)$	$-\dfrac{(x-a)^n}{\lvert Q(x)\rvert}\operatorname{sgn}(x;a,b)+\sum_{p=1}^{n}\dfrac{\Gamma(p-1/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(p)}(b-a)^{p-1}(x-a)^{n-p}$	E 15.5
$\dfrac{(x-b)^n}{\lvert Q(x)\rvert}H(x;a,b)$	$-\dfrac{(x-b)^n}{\lvert Q(x)\rvert}\operatorname{sgn}(x;a,b)+\sum_{p=1}^{n}\dfrac{\Gamma(p-1/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(p)}(a-b)^{p-1}(x-b)^{n-p}$	E 15.5
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}H(x;-1,1)$	$-\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\operatorname{sgn}(x;-1,1)$	E 15.6
$\dfrac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}H(x;-1,1)$	$-\dfrac{x^n}{\sqrt{x^2-1}}\operatorname{sgn}(x;-1,1)+\sum_{p=1}^{N}\dfrac{\Gamma(p-1/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(p)}x^{n+1-2p},\quad N=\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$	E 15.6

$f(x)$	$h(x)=\mathscr{H}f(x)$	
$\frac{1}{x}\frac{1}{\lvert Q(x)\rvert}H(x;a,b)$	$\frac{\pi}{\sqrt{\lvert ab\rvert}}\delta(x)-\frac{1}{x}\frac{1}{\lvert Q(x)\rvert}\operatorname{sgn}(x;a,b)$	E 15.7
$\frac{\lvert Q(x)\rvert}{x}H(x;a,b)$	$\pi\sqrt{\lvert ab\rvert}\,\delta(x)-1+\frac{\lvert Q(x)\rvert}{x}\operatorname{sgn}(x;a,b)$	E 15.7
$\frac{\log\lvert x\rvert}{\sqrt{1-x^2}}H(x;-1,1)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\sin^{-1}x-\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}x\right)H(x;-1,1)$	
	$+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\log(1+\sqrt{1-x^{-2}})\operatorname{sgn}(x;-1,1)$	E 15.9
$\sqrt{1-x^2}\log\lvert x\rvert H(x;-1,1)$	$x\log 2-\sqrt{1-x^2}\left(\sin^{-1}x-\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}x\right)H(x;-1,1)$	
	$-\sqrt{x^2-1}\log(1+\sqrt{1-x^{-2}})\operatorname{sgn}(x;-1,1)$	E 15.9
$\operatorname{sgn}(x-c)H(x;a,b)$	$\frac{1}{\pi}\log\frac{\lvert(x-a)(x-b)\rvert}{(x-c)^2},\quad a<c<b$	E 15.8
$\operatorname{sgn}x\,H(x;-1,1)$	$\frac{1}{\pi}\log\lvert 1-x^{-2}\rvert$	E 15.8
$\sin^{-1}x\,H(x;-1,1)$	$\log 2+\log\sqrt{1-x^2}\,H(x;-1,1)$	
	$-\log\{1+(1-x^{-2})^{-1/2}\}\overline{H}(x;-1,1)$	E 15.8
$\lvert S(x)\rvert H(x;a,b)$	$(-1)^{q+1}\lvert S(x)\rvert\begin{cases}\operatorname{sgn}(x;a,b), & p+q=\text{偶}\\ \overline{H}(x;a,b), & p+q=\text{奇}\end{cases}$	
	$\lvert S(x)\rvert=\lvert x-a\rvert^{-(p+1/2)}\lvert x-b\rvert^{-(q+1/2)}$	E 15.10
$\frac{1}{x^m}H(x-a)$	$-\frac{1}{\pi}\frac{1}{x^m}\left\{\log\lvert x-a\rvert-\log\lvert a\rvert+\sum_{p=1}^{m-1}\frac{1}{p}\left(\frac{x}{a}\right)^p\right\}$	
	$+(-1)^{m-1}\frac{\pi H(-a)}{\Gamma(m)}\delta^{(m-1)}(x)$	E 15.11
$\frac{1}{x^m}H(x;a,b)$	$\frac{1}{\pi}\frac{1}{x^m}\left\{\log\left\lvert\frac{x-b}{x-a}\right\rvert+\log\left\lvert\frac{a}{b}\right\rvert-\sum_{p=1}^{m-1}\frac{1}{p}\left(\frac{1}{a^p}-\frac{1}{b^p}\right)x^p\right\}$	
	$+(-1)^{m-1}\frac{\pi}{\Gamma(m)}\delta^{(m-1)}(x),\quad a<0<b$	E 15.11
$\log\lvert x\rvert H(x;0,a)$	$\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{2}H(x)-\frac{1}{2}(\log\lvert x\rvert)^2-L\left(\frac{x}{a}\right)+\log\lvert a\rvert\log\left(1-\frac{x}{a}\right)\right.$	
	$\left.+\frac{1}{2}(\log\lvert a\rvert)^2-L(1)\right]H(x;-a,a)$	
	$+\frac{1}{\pi}\left\{L\left(\frac{a}{x}\right)+\log\lvert a\rvert\log\left(1-\frac{a}{x}\right)\right\}\overline{H}(x;-a,a)$	

$f(x)$	$h(x)=\mathscr{H}f(x)$	
$\log\|x\|H(x;a,b)$ $(0<a<b)$	$\frac{1}{\pi}\left\{\frac{\pi^2}{2}-\frac{1}{2}(\log\|x\|)^2-L\left(\frac{x}{b}\right)+\log b\log\left(1-\frac{x}{b}\right)+\frac{1}{2}(\log b)^2-L(1)-L\left(\frac{a}{x}\right)-\log a\log\left(1-\frac{a}{x}\right)\right\}\times H(x;a,b)$ $+\frac{1}{\pi}\left\{L\left(\frac{b}{x}\right)+\log b\log\left(1-\frac{b}{x}\right)-L\left(\frac{a}{x}\right)-\log a\log\left(1-\frac{a}{x}\right)\right\}H(x-b)$ $-\frac{1}{\pi}\left\{L\left(\frac{x}{b}\right)-\log b\log\left(1-\frac{x}{b}\right)-\frac{1}{2}(\log b)^2-L\left(\frac{x}{a}\right)+\log a\log\left(1-\frac{x}{a}\right)+\frac{1}{2}(\log a)^2\right\}H(a-x)$	
$\log\|x\|H(x;a,b)$ $(a<0<b)$	$\frac{1}{\pi}\left[L\left(\frac{x}{a}\right)-L\left(\frac{x}{b}\right)-\log\|a\|\log\|x-a\|+\log b\log\|x-b\|+\frac{\pi^2}{2}\operatorname{sgn}x+\frac{1}{2}\left\{(\log\|a\|)^2-(\log b)^2\right\}\right]H(x;a,b)$ $-\frac{1}{\pi}\left\{L\left(\frac{a}{x}\right)-L\left(\frac{b}{x}\right)+\log\|a\|\log\left(1-\frac{a}{x}\right)-\log b\log\left(1-\frac{b}{x}\right)\right\}\overline{H}(x;a,b)$	E 15.12
$\log\|x\|H(x;-1,1)$	$-\frac{1}{\pi}\left\{L(x)-L(-x)-\frac{\pi^2}{2}\operatorname{sgn}x\right\}H(x;-1,1)$ $+\frac{1}{\pi}\left\{L\left(\frac{1}{x}\right)-L\left(-\frac{1}{x}\right)\right\}\overline{H}(x;-1,1)$	E 15.12
$x^\alpha(1-x)^\beta H(x;0,1)$	$\frac{1}{\pi}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}F(1,-\alpha-\beta;1-\alpha;x)H(x;-1,1)$ $-\frac{1}{\pi}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}\frac{1}{x}F\left(1,\alpha+1;\alpha+\beta+2;\frac{1}{x}\right)\times\overline{H}(x;-1,1)$ $-\cot\pi\alpha\, x^\alpha(1-x)^\beta H(x;0,1)$ $-\operatorname{cosec}\pi\alpha\,\|x\|^\alpha(1-x)^\beta H(x;-1,0)$	

$f(x)$	$h(x)=\mathcal{H}f(x)$
$x^{\alpha}(x-1)^{\beta}H(x-1)$ $\mathrm{Re}(\alpha+\beta)<0$	$\dfrac{1}{\pi}\dfrac{\Gamma(-\alpha-\beta)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(1-\alpha)}F(1,-\alpha-\beta;1-\alpha;x)H(x;-1,1)$ $-\dfrac{1}{\pi}\dfrac{\Gamma(-\alpha-\beta-1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(-\alpha)}\dfrac{1}{x}F\left(1,\alpha+1;\alpha+\beta+2;\dfrac{1}{x}\right)$ $\times\overline{H}(x;-1,1)$ $-\dfrac{\lvert x\rvert^{\alpha}\lvert x-1\rvert^{\beta}}{\sin\pi(\alpha+\beta)}\{H(-x-1)+\cos\pi(\alpha+\beta)H(x-1)\}$
$\lvert x\rvert^{\alpha}(1-x)^{\beta}H(-x)$ $\mathrm{Re}(\alpha+\beta)<0$	$-\dfrac{1}{\pi}\dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(-\alpha-\beta)}{\Gamma(-\beta)}F(1,-\alpha-\beta;1-\alpha;x)H(x;-1,1)$ $-\dfrac{1}{\pi}\dfrac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(-\alpha-\beta-1)}{\Gamma(-\beta)}\dfrac{1}{x}F\left(1,\alpha+1;\alpha+\beta+2;\dfrac{1}{x}\right)$ $\times\overline{H}(x;-1,1)$ $+\dfrac{\lvert x\rvert^{\alpha}(1-x)^{\beta}}{\sin\pi\alpha}\{H(x;0,1)+\cos\pi\alpha\,H(x;-1,0)\}$ $+\dfrac{\lvert x\rvert^{\alpha}\lvert x-1\rvert^{\beta}}{\sin\pi(\alpha+\beta)}\{H(x-1)+\cos\pi(\alpha+\beta)H(-x-1)\}$

付録 I Fourier 変換

$f(x)=\mathfrak{F}^{-1}g(\xi)$	$g(\xi)=\mathfrak{F}f(x)$	
$f(x)$	$\left[\int_{-\infty}^{c} f(x)e^{-j\xi x}dx\right]_{+}+\left[\int_{c}^{\infty} f(x)e^{-j\xi x}dx\right]_{-}$	T7.7
$g(x)$	$f(-\xi)$	T5.8
$c_1f_1(x)+c_2f_2(x)$	$c_1g_1(\xi)+c_2g_2(\xi)$	T5.2
$f(ax+b)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}e^{j(b/a)\xi}g\left(\frac{\xi}{a}\right)$, $a, b=$ 実数	T5.7
$e^{jkx}f(x)$	$g(\xi-k)$, $k=$ 実数	T5.7
$xf(x)$	$-\frac{1}{j}g'(\xi)$	T5.7
$f'(x)$	$j\xi\, g(\xi)$	T5.7
$f(-x)$	$g(-\xi)$	T5.4
$\overline{f(x)}$	$\overline{g(-\xi)}$	T5.4
$\varphi(x+c)$	$e^{jc\xi}\mathfrak{F}[\varphi(x)]_{\pm}$, $0\leqq \mathrm{Im}\, c\leqq A_{\pm}$	T7.12
	$\varphi(z)$ は $0\leqq \mathrm{Im} z\leqq A_{\pm}$ で正則	
$e^{-jcx}\mathfrak{F}^{-1}[\varphi(\xi)]_{\pm}$	$\varphi(\xi+c)$	T7.12
$\varphi(x+c)$	$e^{jc\xi}\mathfrak{F}\varphi(x)$, $A_{-}<\mathrm{Im}\, c<A_{+}$	T7.13
	$\varphi(z)$ は $A_{-}<\mathrm{Im}\, z<A_{+}$ で正則	
$e^{-jcx}\mathfrak{F}^{-1}\varphi(\xi)$	$\varphi(\xi+c)$	T7.13
$f_1(x)\cdot f_2(x)$	$g_1(\xi)*g_2(\xi)$	T13.36, T13.37
$f_1(x)*f_2(x)$	$g_1(\xi)\cdot g_2(\xi)$	T13.33, T13.34
$f(x)H(\pm x)$	$\mp[\tilde{G}(\xi)]_{\mp}\equiv\mp[\mathrm{G.\tilde{F}}.g(\xi)]_{\mp}$	T13.38
1	$\delta(\xi)$	E5.1
$\delta(x)$	1	E5.2
$H(\pm x)$	$\pm\frac{1}{j}\left[\frac{1}{\xi}\right]_{\mp}=\pm\frac{1}{j\xi}+\frac{1}{2}\delta(\xi)$	E5.3
$\mathrm{sgn}\, x$	$\frac{2}{j\xi}$	E5.5
$e^{-\alpha x^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\pi^2\xi^2/\alpha}$, $\mathrm{Re}\,\alpha>0$	E5.4
e^{ix^2}	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}(1+i)e^{-i\pi^2\xi^2}$	E5.4
$\frac{\sin 2\pi ax}{\pi x}$	$H(\xi;-a,a)$, $a>0$	E5.5
$H(x;-a,a)$	$\frac{\sin 2\pi a\xi}{\pi\xi}$, $a>0$	E5.5

$f(x)=\mathfrak{F}^{-1}g(\xi)$	$g(\xi)=\mathfrak{F}f(x)$	
$\dfrac{1}{x}$	$-\pi i \operatorname{sgn}\xi$	E5.5
$\dfrac{1}{x\pm ai}$	$\mp je^{\mp 2\pi a\xi}H(\pm\xi),\quad a>0$	E7.10
$\dfrac{1}{x^2+a^2}$	$\dfrac{\pi}{a}e^{-2\pi a\lvert\xi\rvert},\quad a>0$	E7.10
$\dfrac{x}{x^2+a^2}$	$-\pi ie^{-2\pi a\lvert\xi\rvert}\operatorname{sgn}\xi,\quad a>0$	E7.10
$\operatorname{Log}(x\pm ai)$	$\mp\dfrac{1}{\xi}e^{-2\pi a\lvert\xi\rvert}H(\pm\xi)-\left(\gamma+\log 2\pi\mp\dfrac{\pi}{2}i\right)\delta(\xi),\quad a>0$	E7.11
$\log(x^2+a^2)$	$-\dfrac{1}{\xi}e^{-2\pi a\lvert\xi\rvert}\operatorname{sgn}\xi-2(\gamma+\log 2\pi)\delta(\xi),\quad a>0$	E7.11
$\tan^{-1}\dfrac{x}{a}$	$-\dfrac{i}{2}\dfrac{1}{\xi}e^{-2\pi a\lvert\xi\rvert},\quad a>0$	E7.11
$\operatorname{sech}\pi x$	$\operatorname{sech}\pi\xi$	E7.12
$\operatorname{cosech}\pi x$	$-i\tanh\pi\xi$	E7.12
$\tanh\pi x$	$-i\operatorname{cosech}\pi\xi$	E7.12
$\coth\pi x$	$-i\coth\pi\xi$	E7.12
$\dfrac{\cosh 2\pi ax}{\cosh\pi x}$	$\dfrac{2\cos\pi a\cosh\pi\xi}{\cosh 2\pi\xi+\cos 2\pi a},\quad -1<2a<1$	E7.13
$\dfrac{\sinh 2\pi ax}{\cosh\pi x}$	$-\dfrac{2i\sin\pi a\sinh\pi\xi}{\cosh 2\pi\xi+\cos 2\pi a},\quad -1\leqq 2a\leqq 1$	E7.13
$\dfrac{\sinh 2\pi ax}{\sinh\pi x}$	$\dfrac{\sin 2\pi a}{\cosh 2\pi\xi+\cos 2\pi a},\quad -1<2a<1$	E7.13
$\dfrac{\cosh 2\pi ax}{\sinh\pi x}$	$-\dfrac{i\sinh 2\pi\xi}{\cosh 2\pi\xi+\cos 2\pi a},\quad -1\leqq 2a\leqq 1$	E7.13
$\dfrac{1}{x+a}H(x)$	$e^{ja\xi}[E_1(ja\xi)]_-,\quad a>0$	
$\dfrac{1}{x-a}H(x)$	$-e^{-ja\xi}[\mathrm{E}_1(ja\xi)]_-,\quad a>0$	
$\dfrac{1}{x-ai}H(x)$	$e^{2\pi a\xi}[E_1(2\pi a\xi)]_-,\quad a\neq 0$	
$[x^\alpha]_\pm$	$\dfrac{(\mp j)^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)}\lvert\xi\rvert^{-(\alpha+1)}H(\pm\xi),\quad \mp j\equiv 2\pi e^{\mp i\pi/2}$	(7.6.1)
$[(-x)^\alpha]_\pm$	$\dfrac{(\pm j)^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)}\lvert\xi\rvert^{-(\alpha+1)}H(\pm\xi)$	
$\left[\dfrac{1}{x}\right]_\pm$	$\mp jH(\pm\xi)$	E7.10
$[\delta(x)]_\pm$	$\pm H(\pm\xi)$	
$\delta(x,l)$	$\dfrac{1}{l}\delta\left(\xi,\dfrac{1}{l}\right)$	T10.14

ベキ型超関数の Fourier 変換　　α = 複素数（非整数）

$\lvert x\rvert^{\alpha}$	1	$\operatorname{sgn} x$	$H(x)$
	$2\cos\frac{\pi}{2}(\alpha+1)\,\Gamma(\alpha+1)\lvert 2\pi\xi\rvert^{-(\alpha+1)}$	$-2i\sin\frac{\pi}{2}(\alpha+1)\,\Gamma(\alpha+1)\times\lvert 2\pi\xi\rvert^{-(\alpha+1)}\operatorname{sgn}\xi$	$\Gamma(\alpha+1)\lvert 2\pi\xi\rvert^{-(\alpha+1)}\times\exp\left[-\frac{\pi}{2}(\alpha+1)i\operatorname{sgn}\xi\right]=\Gamma(\alpha+1)[(j\xi)^{-(\alpha+1)}]_{-}$
1	1	1	1
$\log\lvert x\rvert$	$k_1(\xi,\alpha+1)$	$k_2(\xi,\alpha+1)$	$k(\xi,\alpha+1)$
$(\log\lvert x\rvert)^2$	$k_1^2(\xi,\alpha+1)+\frac{\partial}{\partial\alpha}k_1(\xi,\alpha+1)$	$k_2^2(\xi,\alpha+1)+\frac{\partial}{\partial\alpha}k_2(\xi,\alpha+1)$	$k^2(\xi,\alpha+1)+\psi'(\alpha+1)$
$(\log\lvert x\rvert)^3$	$k_1^3(\xi,\alpha+1)+\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}k_1(\xi,\alpha+1)+3\frac{\partial}{\partial\alpha}k_1(\xi,\alpha+1)\cdot k_1(\xi,\alpha+1)$	$k_2^3(\xi,\alpha+1)+\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}k_2(\xi,\alpha+1)+3\frac{\partial}{\partial\alpha}k_2(\xi,\alpha+1)\cdot k_2(\xi,\alpha+1)$	$k^3(\xi,\alpha+1)+\psi''(\alpha+1)+3\psi'(\alpha+1)k(\xi,\alpha+1)$

$$k(\xi,\alpha)=\psi(\alpha)-\log\lvert 2\pi\xi\rvert-\frac{\pi}{2}i\operatorname{sgn}\xi=\psi(\alpha)-\frac{\pi}{2}i-[\operatorname{Log}2\pi\xi]_{-}\qquad \psi(\alpha)=\frac{d}{d\alpha}\log\Gamma(\alpha)$$

$$k_1(\xi,\alpha)=\psi(\alpha)-\frac{\pi}{2}\tan\frac{\pi}{2}\alpha-\log\lvert 2\pi\xi\rvert\qquad k_2(\xi,\alpha)=\psi(\alpha)+\frac{\pi}{2}\cot\frac{\pi}{2}\alpha-\log\lvert 2\pi\xi\rvert$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}k_1(\xi,\alpha)=\psi'(\alpha)-\frac{\pi^2}{4}\sec^2\frac{\pi}{2}\alpha\qquad \frac{\partial}{\partial\alpha}k_2(\xi,\alpha)=\psi'(\alpha)-\frac{\pi^2}{4}\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{2}\alpha$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}k_1(\xi,\alpha)=\psi''(\alpha)-\frac{\pi^3}{4}\sec^2\frac{\pi}{2}\alpha\tan\frac{\pi}{2}\alpha\qquad \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}k_2(\xi,\alpha)=\psi''(\alpha)+\frac{\pi^3}{4}\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{2}\alpha\cot\frac{\pi}{2}\alpha$$

ベキ型超関数の Fourier 変換　$(n=0,1,2,\cdots)$

x^n	1		$\operatorname{sgn} x$	$H(x)$	
	$\dfrac{\delta^{(n)}(\xi)}{(-j)^n}$	$-\pi i\dfrac{n!}{(j\xi)^{n+1}}\operatorname{sgn}\xi$	$2\dfrac{n!}{(j\xi)^{n+1}}$	$\dfrac{1}{2}\dfrac{\delta^{(n)}(\xi)}{(-j)^n}$	$\dfrac{n!}{(j\xi)^{n+1}}$
1	1	0	1	1	1
$\log\lvert x\rvert$	k_0	1	$k_r(\xi,n+1)$	k_0	$k(\xi,n+1)$
$(\log\lvert x\rvert)^2$	$k_0^2+\psi'(n+1)+\dfrac{\pi^2}{4}$	$2k_r(\xi,n+1)$	$k_r^2(\xi,n+1)+\psi'(n+1)-\dfrac{\pi^2}{4}$	$k_0^2+\psi'(n+1)+\dfrac{\pi^2}{4}$	$k^2(\xi,n+1)+\psi'(n+1)$
$(\log\lvert x\rvert)^3$	$k_0^3+\psi''(n+1)+3\left\{\psi'(n+1)+\dfrac{\pi^2}{4}\right\}k_0$	$3\left\{k_r^2(\xi,n+1)-\dfrac{\pi^2}{12}+\psi'(n+1)\right\}$	$k_r^3(\xi,n+1)+\psi''(n+1)+3\left\{\psi'(n+1)-\dfrac{\pi^2}{4}\right\}\times k_r(\xi,n+1)$	$k_0^3+\psi''(n+1)+3\left\{\psi'(n+1)+\dfrac{\pi^2}{4}\right\}k_0$	$k^3(\xi,n+1)+\psi''(n+1)+3\psi'(n+1)k(\xi,n+1)$

$$k(\xi,n)=\psi(n)-\log|2\pi\xi|-\frac{\pi}{2}i\operatorname{sgn}\xi \qquad \psi(n)=-\gamma+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}$$

$$k_r(\xi,n)=\psi(n)-\log|2\pi\xi| \qquad \psi'(n)=\frac{\pi^2}{6}-\left\{1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}\right\}$$

$$k_0=\psi(n+1)-\log 2\pi \qquad \psi''(n)=2\left\{-\zeta(3)+1+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^3}\right\}$$

ベキ型超関数の Fourier 変換　$(m=1,2,\cdots)$

x^{-m}	1	$\operatorname{sgn} x$	$H(x)$
	$-\pi i\dfrac{(-j\xi)^{m-1}}{(m-1)!}\operatorname{sgn}\xi$	$\dfrac{(-j\xi)^{m-1}}{(m-1)!}$	$\dfrac{(-j\xi)^{m-1}}{(m-1)!}$
1	1	$2k_r(\xi,m)$	$k(\xi,m)$
$\log\lvert x\rvert$	$k_r(\xi,m)$	$k_r^2(\xi,m)-\left\{\psi'(m)+\dfrac{\pi^2}{4}\right\}$	$\dfrac{1}{2}\{k^2(\xi,m)-\psi'(m)\}$
$(\log\lvert x\rvert)^2$	$k_r^2(\xi,m)-\left\{\psi'(m)-\dfrac{\pi^2}{4}\right\}$	$\dfrac{2}{3}\left[k_r^3(\xi,m)+\psi''(m)-3\left\{\psi'(m)-\dfrac{\pi^2}{12}\right\}k_r(\xi,m)\right]$	$\dfrac{1}{3}\left[k^3(\xi,m)+\psi''(m)-3\left\{\psi'(m)-\dfrac{\pi^2}{3}\right\}k(\xi,m)\right]$

$$k(\xi,m)=\psi(m)-\log|2\pi\xi|-\frac{\pi}{2}i\operatorname{sgn}\xi \qquad \psi(m)=-\gamma+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m-1}$$

$$k_r(\xi,m)=\psi(m)-\log|2\pi\xi| \qquad \psi'(m)=\frac{\pi^2}{6}-\left\{1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(m-1)^2}\right\}$$

$$k_0=\psi(m+1)-\log 2\pi \qquad \psi''(m)=2\left\{-\zeta(3)+1+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{(m-1)^3}\right\}$$

付録 J　Laplace 変換

$$\hat{f}(p)=\mathcal{L}f(x)=\int_{-0}^{\infty}f(x)e^{-px}dx \qquad \text{D18.1}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\hat{f}(p)=\mathcal{P}_0^{\infty}f(x) \qquad \text{D18.1}$$

$$\mathcal{L}=\mathcal{F}\mathcal{P}_{-0}^{\infty},\quad \mathcal{L}^{-1}=\mathcal{F}^{-1}\quad (p=j\xi) \qquad \text{T18.1}$$

$$[\hat{f}(j\xi)]_-=\mathcal{F}\mathcal{P}_{-0}^{\infty}f(x) \qquad \text{T18.1}$$

$$\mathcal{F}f(x)=[\hat{f}_-(-j\xi)]_++[\hat{f}(j\xi)]_--\mathcal{F}\{\mathcal{P}(0)f(x)\} \qquad \text{T18.2}$$

$$\hat{f}(p)=\mathcal{L}f(x),\quad \hat{f}_-(p)=\mathcal{L}f(-x)$$

$$\text{H.F.}\ \frac{1}{j}\left[\int_u,\int_d\right]\hat{f}(p)e^{xp}dp=\begin{cases}f(x), & x\geqq 0\\ 0, & x<0\end{cases} \qquad \text{T18.4}$$

$$\frac{1}{j}\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty}[\hat{f}(j\xi)]_-e^{jx\xi}d\xi=\begin{cases}\text{O.F.}\ f(x), & x>0\\ \frac{1}{2}f(+0), & x=0\\ 0, & x<0\end{cases} \qquad \text{T18.4}$$

$f(x)$	$\hat{f}(p)=\mathcal{L}f(x)$	
$\mathcal{P}_{-0}^{\infty}f(x)$	$\hat{f}(p)$	T18.3
$f(ax)$	$\frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{p}{a}\right),\quad a>0$	T18.5
$f(x+a)$	$e^{ap}\left\{\hat{f}(p)-\int_{-0}^{a-0}f(x)e^{-px}dx\right\}$	T18.5
$x^nf(x)$	$(-1)^n\hat{f}^{(n)}(p)$	T18.6
$f^{(n)}(x)$	$p^n\hat{f}(p)-\sum_{m=0}^{n-1}f^{(m)}(-0)p^{n-m-1}$	T18.7
1	$\frac{1}{p}$	E18.1
x^n	$n!\,p^{-(n+1)}$	E18.1
$\delta^{(n)}(x)$	p^n	E18.1

$\mathcal{L}|x|^{\alpha-1}(\log|x|)^n$

	$\|x\|^{\alpha-1}$	x^{-m}
	$\Gamma(\alpha)p^{-\alpha}$	$\dfrac{(-p)^{m-1}}{\Gamma(m)}$
1	1	$k(p,m)$
$\log\|x\|$	$k(p,\alpha)$	$\frac{1}{2}[k^2(p,m)-\psi'(m)]$
$(\log\|x\|)^2$	$k^2(p,\alpha)+\psi'(\alpha)$	$\frac{1}{3}[k^3(p,m)-\{3\psi'(m)-\pi^2\}k(p,m)$ $+\psi''(m)]$
$(\log\|x\|)^3$	$k^3(p,\alpha)+\psi''(\alpha)$ $+3\psi'(\alpha)k(p,\alpha)$	$\frac{1}{4}[k^4(p,m)-2\{3\psi'(m)-\pi^2\}k^2(p,m)$ $+4\psi''(m)k(p,m)$ $+3\{\psi'(m)\}^2-2\pi^2\psi'(m)-\psi'''(m)]$

$$k(p,\alpha)=\psi(\alpha)-\log p,\quad \psi(\alpha)=\frac{d}{d\alpha}\log\Gamma(\alpha)$$

$$\psi(m)=-\gamma+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m-1}$$

$$\psi^{(n-1)}(m)=(-1)^{n-1}\Gamma(n)\left\{-\zeta(n)+1+\frac{1}{2^n}+\cdots+\frac{1}{(m-1)^n}\right\},\quad n=2,3,\cdots$$

$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6},\quad \zeta(3)=1.20205\cdots,\quad \zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$$

付録 K　余弦変換，正弦変換

$$\mathfrak{F}_c f(x) = \int_0^\infty f(x) \cos 2\pi\xi x \, dx \qquad \text{(O.F.)} \qquad (18.4.3)$$

$$\mathfrak{F}_s f(x) = \int_0^\infty f(x) \sin 2\pi\xi x \, dx \qquad \text{(O.F.)} \qquad (18.4.4)$$

$$\mathfrak{F}_c f(x) = \frac{1}{2}\mathfrak{F} f_e(x) \qquad \text{D18.2}$$

$$\mathfrak{F}_s f(x) = \frac{i}{2}\mathfrak{F} f_o(x) \qquad \text{D18.2}$$

$$f_e(x) = \mathcal{P}_0^\infty f(x) + \mathcal{P}_{-\infty}^{-0} f(-x) + \frac{1}{2}\mathcal{P}(0)\{f(x)+f(-x)\}$$

$$f_o(x) = \mathcal{P}_0^\infty f(x) - \mathcal{P}_{-\infty}^{-0} f(-x) + \frac{1}{2}\mathcal{P}(0)\{f(x)-f(-x)\}$$

$$f_e(x) = 4\,\mathfrak{F}_c g_e(\xi) = 4\,\mathfrak{F}_c\mathfrak{F}_c f(x) \qquad \text{T18.8}$$

$$f_o(x) = 4\,\mathfrak{F}_s g_o(\xi) = 4\,\mathfrak{F}_s\mathfrak{F}_s f(x) \qquad \text{T18.8}$$

$$\mathfrak{F}_c f(x) = \frac{1}{2}\left\{[\hat{f}(-p)]_+ + [\hat{f}(p)]_- - \frac{1}{2}[\hat{f}_0(p)+\hat{f}_0(-p)]\right\} \qquad \text{T18.9}$$

$$\mathfrak{F}_s f(x) = \frac{1}{2i}\left\{[\hat{f}(-p)]_+ - [\hat{f}(p)]_- + \frac{1}{2}[\hat{f}_0(p)-\hat{f}_0(-p)]\right\} \qquad \text{T18.9}$$

$$\hat{f}_0(p) = \mathcal{L}\{\mathcal{P}(0)f(x)\}$$

$f(x)$	$\mathfrak{F}_c f(x)$	$\mathfrak{F}_s f(x)$
1	$\frac{1}{2}\delta(\xi)$	$\frac{1}{2\pi\xi}$
$\delta(x)$	$\frac{1}{2}$	0
$\delta'(x)$	0	$-\pi\xi$

参　考　書

(1) Abramowitz, M. & Stegun, I.A.: Handbook of Mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables (U.S. Nat. Bur. Stand., 1964).

(2) Carrier, G.F., Krook, M. & Pearson, C.F.: Functions of a complex variable: Theory and technique (McGraw-Hill, 1966).

(3) Erdélyi, A. (ed.): Tables of integral transforms, I, II (McGraw-Hill, 1954).

(4) Гельфанд, И.М. & Шилов, Г.Е.: Обобщенные Функции и Действия над ними (Физматгиз, 1959). 功力金二郎, 井関清志, 麦林布道訳：超関数論入門, I, II (共立全書, 1963～64). Gel'fand, I.M. & Shilov, G.E.: Generalized functions, I, II (Academic Press, 1964～68).

(5) 今井　功：流体力学 (岩波全書, 1970).

(6) 今井　功：流体力学, 前編 (裳華房, 1973).

(7) 今井　功：等角写像とその応用 (岩波書店, 1979).

(8) Jones, D.S.: Generalized functions (McGraw-Hill, 1966).

(9) 金子　晃：超函数入門, 上 (東大出版会, 1980).

(10) 小松彦三郎：超函数論入門, 岩波講座基礎数学 (1978).

(11) Lighthill, M.J.: An introduction to Fourier analysis and generalized functions (Cambridge Univ. Press, 1958). 高見穎郎訳：フーリエ解析と超関数 (ダイヤモンド社, 1975).

(12) 森本光生：佐藤超函数入門 (共立出版, 1976).

(13) 佐藤幹夫：超函数の理論について, 数学, 10巻1号 (1958年10月), 1～27.

(14) Schwartz, L.: Théorie des distributions, I, II (Hermann, 1950～51; 3rd ed. 1966). 岩村聯, 石垣春夫, 鈴木文夫訳：超函数の理論, 原書第3版 (岩波書店, 1971).

(15) Titchmarsh, E.C.: The theory of functions, 2nd ed. (Oxford Univ. Press, 1939).

(16) Titchmarsh, E.C.: Introduction to the theory of Fourier integrals, 2nd ed. (Oxford Univ. Press, 1948).

(17) Wiener, N.: The Fourier integral and certain of its applications (Cambridge Univ. Press, 1933).

(18) 吉田耕作：積分方程式論, 第2版 (岩波全書, 1978).

(19) 吉田洋一：函数論 (岩波全書, 1938; 第2版, 1965).

(20) Zemanian, A.H.: Distribution theory and transform analysis, An introduction to generalized functions, with applications (McGraw-Hill, 1965).

本書を読むのに参考書は必要ではないが, 執筆の際に著者が参考にしたものを挙げておいた. 太字で示した (**11**) と (**13**) には特にお世話になった. (4), (8), (14), (20) は Schwartz の流儀の超関数, (9), (10), (12) は佐藤の超関数を扱っている.

の段階では Poisson の和公式を述べることができなかった．それにはわけがある．Lighthill の本では，‘たたみこみ’は超関数とふつうの関数とのばあいしか扱われていない．Poisson の和公式は δ 関数列 $\delta(x,l)$ と $f(x)$ とのたたみこみを利用するのであるから，$f(x)$ としては超関数のばあいも考えるべきだ．これが頭の中にあって，超関数どうしのたたみこみをなんとかとり上げたいというのが筆者の希望であった．

超関数どうしのたたみこみといえば，それとの関連で超関数どうしの積も考えたくなる．その適切な表現法を模索するうちに‘射影’の考えにたどりついた．超関数 $f(x)$ をその定義区間に含まれる区間 (a,b) に射影してそれを全区間 $(-\infty,\infty)$ に拡大する操作である．これによって，特異点を共有しない超関数どうしの積が定義でき，それの Fourier 変換として超関数どうしのたたみこみも定義できる．このような考えで Lighthill の本を補強してみようというのが第 13 回以後の解説である．この作業は第 22 回で一応完了した．その間に筆者の得た大きい収穫は，超関数の中には四則演算も超関数の関数も考えられるものがあるということである．すなわち，この解説で上（下）型超関数と名付けたものの存在である．これは，母関数による超関数の定義から自明のことであるはずなのに，解説をはじめた頃には筆者はまだ気付いていなかった．“超関数は線形演算のみを許す”というような先入観があったせいである．

第 23 回以降は，具体的な問題への超関数の応用のしかたを例示すること，とくにこの最終回では，Laplace 変換も超関数の導入によって Fourier 変換との関連がより緊密になることを示すのにあてた．しかし，具体的といっても，個々の境界値問題や初期値問題を扱う余裕はなかった．これらの応用問題の議論は別の機会に，あるいは他の適当な方に期待したいと思う．

超関数論の通俗化——これが筆者の願いである．そしてその第一歩がこの解説である．これを見られた数学者には（もしおられるとしての話であるが），随所に誤まりや思い違いを発見されたことであろう．しかし，これが非専門家の数学の一般的水準であることを理解されて，通俗化（低俗化ではない！）にご協力をたまわりたいものと思う．」

索　引

（立体数字はⅠ巻，斜体数字はⅡ巻）

著者略歴

今井　功（いまい　いさお）

1936年　東京大学理学部物理学科卒業
1951年　朝日文化賞受賞
1959年　学士院恩賜賞受賞
1979年　文化功労者
1988年　文化勲章受章
現　在　東京大学名誉教授
　　　　工学院大学名誉教授
　　　　理学博士

主要著書

「流体力学」(岩波書店，1970)
「流体力学(前編)」(裳華房，1973)
「等角写像とその応用」(岩波書店，1979)
「バークレー物理学コース　力学」(丸善，1975)(監訳)
「演習　力　学」(サイエンス社，1981)(共著)
「複素解析と流体力学」(日本評論社，1989)
「電磁気学を考える」(サイエンス社，1990)

応用超関数論 II

1981年5月25日 ©　　初　版　発　行
1991年3月10日　　初版第4刷発行

著　者　今井　功　　発行者　森平勇三
　　　　　　　　　　印刷者　篠倉正信
　　　　　　　　　　製本者　関川　弘

発行所　**株式会社　サイエンス社**
〒101　東京都千代田区神田須田町2丁目4番地
安部徳ビル
〔営業〕　☎(03)3256-1091(代)　振替　東京7-2387
〔編集〕　☎(03)3256-1093(代)

印刷　(株)ディグ　　製本　関川製本所

ISBN4-7819-0216-2

PRINTED IN JAPAN